Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

М.М. Михалева, А.С. Симонова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания и домашние задания

для студентов физико – технологического института

Екатеринбург
УГТУ-УПИ
2013

Авторы: М.М. Михалёва, А.С. Симонова
Научный редактор: доц., канд. физ.-мат. наук Н.В. Чуксина

Алгебра и аналитическая геометрия
Методические указания и домашние задания для студентов физико – технологического института: учеб.пособие / М.М. Михалёва, А.С. Симонова. Екатеринбург: УРФУ, 2013. 78 с.

В пособии разбирается решение типовых примеров и задач по следующим темам: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия, комплексные числа. Предлагаются варианты индивидуальных домашних заданий для студентов первого курса дневной формы обучения

Библиогр.: 5 назв. Рис. 11.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы
и уравнения математической физики»

УДК 512/514(075.8)
ББК 22.14+22.151

© УГТУ-УПИ, 2013

Содержание

1. Решение типовых задач по курсу алгебра и аналитическая геометрия» 4
1.1. Кривые в декартовой и полярной системах координат 4
1.2. Матричное исчисление 9
1.3. Системы линейных уравнений 11
1.4. Аналитическая геометрия 18
1.5. Комплексные числа 21
2. Индивидуальные задания по курсу «Алгебра и аналитическая геометрия» 27
Библиографический список 77

1.Решение типовых задач по курсу «Алгебра и аналитическая геометрия»

1.1. Кривые в декартовой и полярной системах координат

1.1.1.Кривые второго порядка

Задача 1. Написать уравнение окружности, центр которой находится в фокусе параболы $x^2 - 12y = 0$, а радиус равен параметру параболы p. Сделать чертеж.

Решение. Каноническое уравнение параболы $x^2 = 2py$, координаты фокуса $F(0; p/2)$. В нашей задаче каноническое уравнение параболы $x^2 = 12y$, $p = 6$, $F(0;3)$. Следовательно, получаем уравнение окружности $x^2 + (y-3)^2 = 6^2$. Построим соответствующий график:

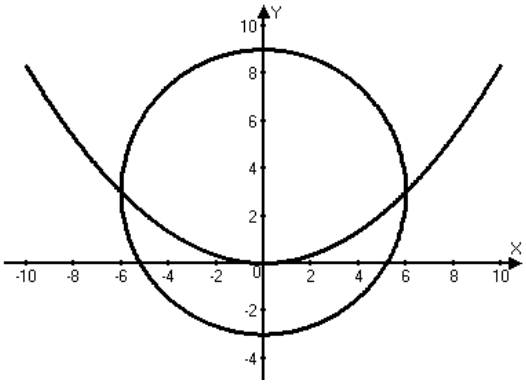

Рис. 1

Задача 2. Установить, какие линии определяются данными уравнениями. Изобразить линии на чертеже:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$; б) $x = -5 + \sqrt{-y^2 - 6y + 40}$.

Решение.

а) Выделим полные квадраты относительно каждой переменной, а свободные члены перенесем в правую часть:

$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$; $16\left(x^2 - 4x\right) - 9\left(y^2 + 2y\right) = -199$;

$16(x-2)^2 - 64 - 9(y+1)^2 + 9 = -199$; $16(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = -144$;

$\dfrac{16(x-2)^2}{144} - \dfrac{9(y+1)^2}{144} = -1$; $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = -1$.

Уравнение $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = -1$ является каноническим уравнением гиперболы с центром в точке $C(2;-1)$ и полуосями $a = 3, b = 4$ (рис. 2). Для построения гиперболы строим основной прямоугольник с центром $C(2;-1)$ и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными соответственно осям координат Ox и Oy, проводим прямые, содер-

жащие диагонали прямоугольника (асимптоты гиперболы). Отмечаем вершины гиперболы $(x_0; y_0 \pm b) = \left[\begin{array}{l}(2;3)\\(2;-5)\end{array}\right.$ и проводим две ее ветви, приближающиеся к асимптотам.

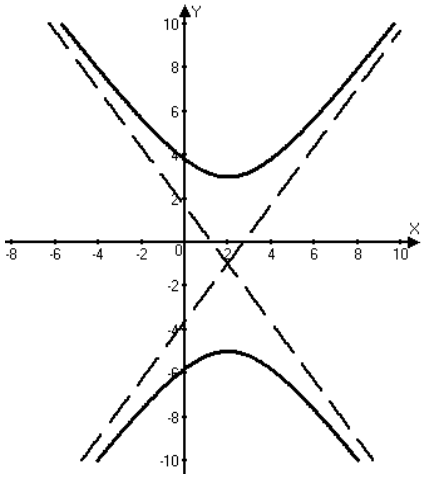

Рис. 2

b) $x = -5 + \sqrt{-y^2 - 6y + 40}$.

При решении данной задачи необходимо учесть неотрицательность выражения $x+5$, то есть $x+5 \geq 0$; возведем обе части исходного уравнения в квадрат и выделим полные квадраты:

$(x+5)^2 = -y^2 - 6y + 40$; $\qquad (x+5)^2 + y^2 + 6y - 40 = 0$;

$(x+5)^2 + (y+3)^2 - 9 - 40 = 0$; $\qquad \begin{cases}(x+5)^2 + (y+3)^2 = 49;\\ x \geq -5.\end{cases}$

Уравнение $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 49$ – каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(-5;-3)$ и радиусом $r = 7$. С учетом $x+5 \geq 0$ получаем правую часть этой окружности (рис.3).

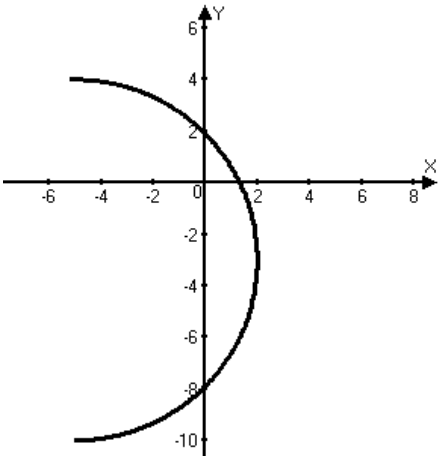

Рис. 3

1.1.2. Построение линий, заданных парметрически

Функция, определяемая системой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, называется функцией, заданной параметрически, а переменная t называется параметром. Можно выделить два основных способа построения параметрических линий:

1) исключение параметра t (приводим уравнение к виду $y = y(x)$ или $x = x(y)$);

2) построение по точкам (задаем параметр и находим точки построения $(x; y)$).

В обоих случаях необходимо учитывать множества значений x и y.

Задача 3. Построить линию $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = \dfrac{1}{t^2 + 1}. \end{cases}$

Решение. Из уравнения определяем множества значений переменных: $\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Теперь исключаем параметр: $t^2 = x + 1$, тогда $y = \dfrac{1}{x+2}$. Уравнение определяет гиперболу с асимптотами $x = 2, y = 0$. Искомый график получаем из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ путем сдвига по оси Ox на 2 единицы влево и оставляем часть, соответствующую найденному множеству значений.

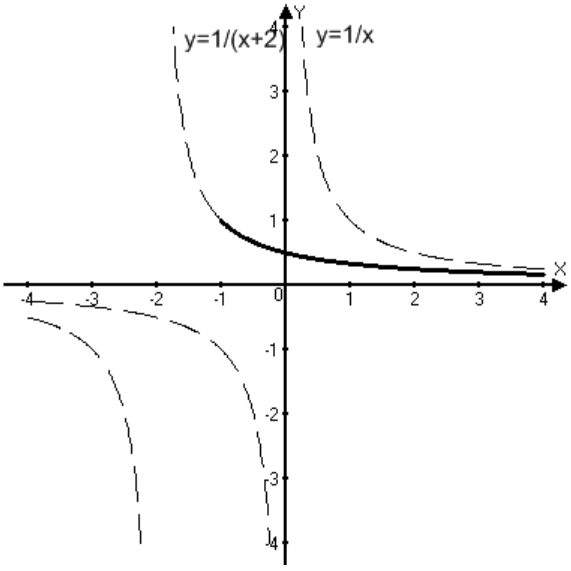

Рис. 4

Задача 4. Построить линию $\begin{cases} x = t, \\ y = t + \sin t. \end{cases}$

Решение. При исключении параметра получаем не элементарную функцию $y = x + \sin x$, поэтому построение будем выполнять по второму способу. Множества значений переменных: $x, y \in R$. Так как $x(t) = -x(t)$, $y(t) = -y(t)$, то функция является нечетной и ее график симметричен относительно начала координат (для построения графика достаточно взять неотрицательные значения параметра). Вычисляем координаты точек построения:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
y	0	$\pi/4+\sqrt{2}/2$	$\pi/2+1$	$3\pi/4+\sqrt{2}/2$	π	$5\pi/4-\sqrt{2}/2$	$3\pi/2-1$	$7\pi/4-\sqrt{2}/2$	2π

Используя периодичность функции $\sin t$, получаем дополнительные свойства:

– если $t = \pi n$ $(n \in Z)$, то $y = x$ (точки искомой кривой лежат на прямой $y = x$);

– если $\pi n < t < \pi + \pi n$ $(n \in Z)$, то $y > x$ (точки искомой кривой лежат выше прямой $y = x$);

– если $\pi + \pi n < t < 2\pi + \pi n$ $(n \in Z)$, то $y < x$ (точки искомой кривой лежат ниже прямой $y = x$);

Строим график:

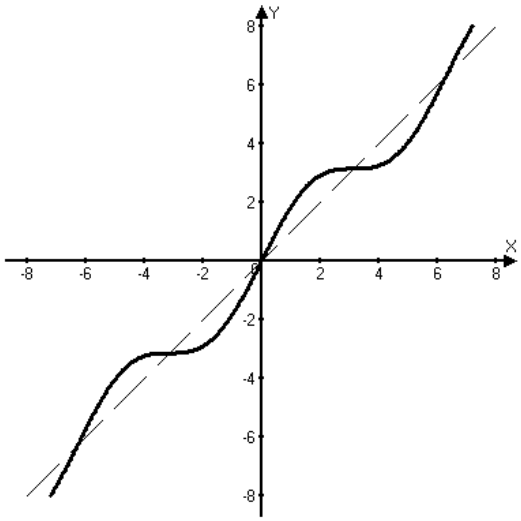

Рис. 5

1.1.3. Построение кривых в полярной системе координат

Полярная система координат определяется точкой O, называемой полюсом, и лучом Ox, исходящим из точки O и называемым полярной осью. Полярные координаты произвольной точки обозначают: $M(\rho;\varphi)$, где $\rho-$полярный радиус ($\rho \geq 0$), $\varphi-$полярный угол. Для построения точки M проводим луч, соответствующий повороту полярной оси Ox вокруг полюса O на угол φ (если $\varphi > 0$, то поворачиваем против часовой стрелки; если $\varphi < 0$, то поворачиваем по часовой стрелке) и на этом луче откладываем расстояние ρ. Используя формулы связи, можно перейти от декартовой системы координат к полярной и наоборот: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, где (x, y) и $(\rho;\varphi)$ координаты одной и той же точки в декартовой и полярной системах координат соответственно.

Задача 5. Построить линию, заданную в полярной системе координат $\rho = \dfrac{4}{\cos\varphi}$.

Решение. Укажем ограничения для полярного угла: так как $\rho > 0$, то $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Вычисляем координаты точек построения:

φ	0	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/3$
ρ	4	$8/\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$	8

Видим, что при $\varphi \to \pm\pi/2$ радиус $\rho \to +\infty$.

Строим график:

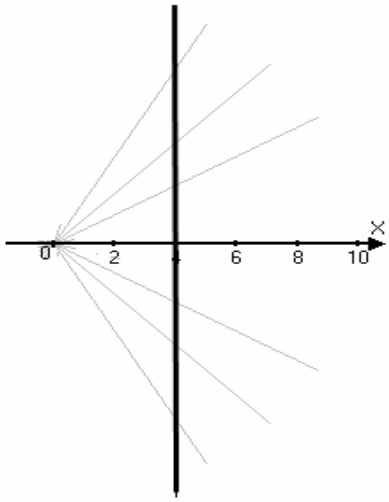

Рис. 6

Этот же график можно построить с помощью перехода в декартову систему координат: так как $\rho\cos\varphi = x$, получаем уравнение $x = 4$ (график прямой проходит через точку $(4;0)$ параллельно оси Oy).

Задача 6. Перейти к полярным координатам и построить линию $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4x^2 y$.

Решение. Используем формулы связи: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тогда $x^2 + y^2 = \rho^2$. Подставляем в уравнение и получаем $\rho^4 = 4\rho^3\cos^2 x\sin x$ или $\rho = 4\cos^2 x\sin x$. Так как $\rho \geq 0$, то возникают ограничения для полярного угла: $0 \leq \varphi \leq \pi$. Вычисляем координаты точек построения:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
ρ	0	$3/2$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}$	$3/2$	0

Строим график:

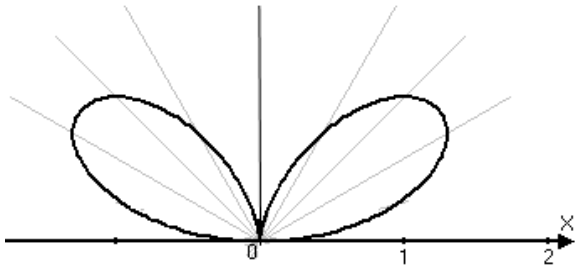

Рис. 7

1.2. Матричное исчисление

Задача 7. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ найти миноры и алгебраические дополнения элементов четвертой строки и четвертого столбца. Вычислить определитель $|A|$: а) разложив его по элементам 4–й строки; б) разложив его по элементам 4–ого столбца; в) по элементам четвертой строки, предварительно получив максимальное количество нулей в этой строке.

Решение. Найдем миноры и алгебраические дополнения к указанным элементам матрицы A. Элементу a_{41} соответствует минор M_{41}, получающийся из определителя исходной матрицы путем вычеркивания четвертой строки и первого столбца,

Для элемента a_{42} вычисляем минор M_{42} после вычеркивания четвертой строки и второго столбца в матрице A.

$$M_{41} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+2+3=3; \qquad M_{42} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2+2-1+4-1=3.$$

Аналогично,

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2-3=-3; \qquad M_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3-6+3=0;$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+3+2=3; \qquad M_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+6-2=3;$$

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+6-1=3.$$

Полученным минорам соответствуют алгебраические дополнения

$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot M_{41} = -3$; $\quad A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot M_{42} = 3$; $\quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot M_{43} = 3$;

$A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot M_{44} = 0$; $\quad A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot M_{14} = -3$; $\quad A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot M_{24} = 3$

$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot M_{34} = -3$.

Определители третьего порядка и выше вычисляют методом разложения по элементам строки или столбца по следующей формуле:

$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$ – разложение по i-ой строке, где a_{ij} элемент определителя, а A_{ij} – алгебраическое дополнение к этому элементу $(j = 1, 2, ..., n)$.

Аналогично и разложение по столбцу: $|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}$.

Вычислим определитель исходной матрицы,

а) разложив его по элементам 4-й строки.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44} = -3+3-3+0=-3$$

б) разложив его по элементам 4-ого столбца.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = a_{14} \cdot A_{14} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{34} \cdot A_{34} + a_{44} \cdot A_{44} = -3 + 3 - 3 + 0 = -3$$

в) по элементам четвертой строки, предварительно получив максимальное количество нулей в этой строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=} (-1) \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{5}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4-1) = -3;$$

1 – первым действием вычитаем из второй и четвертой строк первую;

2 – из третьей строки вычитаем вторую строку;

3 – из четвертой строки вычитаем третью, умноженную на два, в результате чего получили максимальное число нулей в четвертой строке;

4 – разложили определитель по элементам четвертой строки;

5 – разложили определитель по элементам третьей строки.

1.3. Системы линейных уравнений

Задача 8. Дана система линейных уравнений (СЛУ) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$

Решить систему, а) пользуясь правилом Крамера; б) применяя метод Жордана–Гаусса.

Решение. а) Согласно правилу Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – определитель матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных СЛУ, Δ_i - определитель матрицы, полученный из Δ заменой i-ого столбца на столбец свободных коэффициентов B.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$ (определитель был вычислен в предыдущей задаче).

Вычислим соответствующие Δ_i:

– для получения Δ_1 в определителе Δ заменим 1-й столбец столбцом свободных коэффициентов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 23 + 21 - 19 + 3 \cdot 6 = -3$$

– для получения Δ_2 в определителе Δ заменим 2-й столбец столбцом свободных коэффициентов

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-12) + (-6) - (-6) + 3 \cdot (-6) = -6$$

– для получения Δ_3 в определителе Δ заменим 3-й столбец столбцом свободных коэффициентов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-19) + (-15) - (-17) + 3 \cdot (-6) = 3$$

– для получения Δ_4 в определителе Δ заменим 4-й столбец столбцом свободных коэффициентов

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\cdot 10\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-8\cdot 3+5\cdot 3+3+10\cdot 0=-6$$

Теперь находим неизвестные:

$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-3}{-3}=1$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-6}{-3}=2$, $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{3}{-3}=-1$, $x_4=\dfrac{\Delta_4}{\Delta}=\dfrac{-6}{-3}=2$.

Столбец неизвестных $X=(1;\,2;\,-1;\,2)^T$.

Для проверки правильности ответа подставляем найденные $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$, $x_4=2$ в каждое уравнение системы и получаем тождество. Например, подставим в первое уравнение системы:

$x_1+2x_2-x_3+x_4=8$, получим $1+2\cdot 2-1\cdot(-1)+2\equiv 8$, то есть тождество.

б) Применим метод Жордана–Гаусса для решения системы линейных уравнений. Запишем расширенную матрицу системы $(A|B)$, добавив к матрице системы столбец свободных членов. Элементарными преобразованиями получим на месте матрицы A единичную матрицу, тогда справа от черты будет столбец искомых неизвестных. $(A|B)\underset{преобразованиями}{\overset{элементарными}{\sim\ldots\sim}}(E|X)$.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 8\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 3 & 10\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 8\\ 1 & -1 & 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 8\\ 1 & -1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2\end{array}\right)\overset{3}{\sim}$$

$$\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right);$$

1 – первым действием вычитаем из второй и четвертой строк первую;

2 – из третьей строки вычитаем вторую строку;

3 – из четвертой строки вычитаем третью, умноженную на два, из первой вычитаем третью. Затем тут же полученную четвертую строку умножаем на два и прибавляем к первой, из второй вычитаем четвертую строку;

4 – из второй строки вычитаем первую;

5 – элементы второй строки поделили на 3, четвертой на минус единицу, из первой строки вычли новую вторую строку;

6 – поменяли строки местами так, чтобы слева получилась единичная матрица, тогда справа получили столбец искомых неизвестных, а именно: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$ или $X = (1;2;-1;2)^T$.

Задача 9. Решить матричное уравнение $AX = B$

а) с помощью обратной матрицы; б) методом Жордана – Гаусса,

если $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Решим матричное уравнение с помощью обратной матрицы. Для этого умножим обе части уравнения $AX = B$ на обратную матрицу A^{-1} слева:

$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$. Найдем обратную матрицу для матрицы A с помощью присоединенной матрицы A_p, используя формулу

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A_p = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}^T$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение к соответствующему элементу a_{ij} матрицы A.

Вычислим определитель матрицы A

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = (-4-2) - 5(8+3) - (-4+3) = -60.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (минор M_{ij} получают из определителя матрицы A путем вычеркивания $i-$ой строки и $j-$го столбца).

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 17;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

Составляем присоединенную матрицу A_p, равную транспонированной матрице из алгебраических дополнений. $A_p = \begin{pmatrix} -6 & -18 & -6 \\ -11 & 7 & -1 \\ -1 & 17 & -11 \end{pmatrix}$, Делим каждый элемент матрицы A_p на $|A|$ и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-60}\begin{pmatrix} -6 & -11 & -1 \\ -18 & 7 & 17 \\ -6 & -1 & -11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 11/60 & -7/60 & 1/60 \\ 1/60 & -17/60 & 11/60 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 18 & 6 \\ 11 & -7 & 1 \\ 1 & -17 & 11 \end{pmatrix}.$$

Остается перемножить две матрицы:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 18 & 6 \\ 11 & -7 & 1 \\ 1 & -17 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6+18 & -6+36 & 6-72-12 & -12+18+6 \\ 11+3 & -11-14 & 11+28-2 & -22-7+1 \\ 1+33 & -1-34 & 1+68-22 & -2-17+11 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 24 & 30 & -78 & 12 \\ 14 & -25 & 37 & -28 \\ 34 & -35 & 47 & -8 \end{pmatrix} = X.$$

б) Решим матричное уравнение методом Жордана – Гаусса.

Составим расширенную матрицу $(A|B)$. Элементарными преобразованиями получаем в левой части единичную, тогда справа от черты получим матрицу X:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 5 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 5 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & -2 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & -17 & 7 & 0 & 3 & -5 & 7 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 5 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & -2 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 60 & 0 & 14 & -25 & 37 & -28 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -6 & 0 & -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -2 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 60 & 0 & 14 & -25 & 37 & -28 \end{array}\right) \overset{4}{\sim}$$

$$\overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 10 & 0 & 0 & 4 & 5 & -13 & 2 \\ 0 & 0 & 60 & 34 & -35 & 47 & -8 \\ 0 & 60 & 0 & 14 & -25 & 37 & -28 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4/10 & 5/10 & -13/10 & 2/10 \\ 0 & 1 & 0 & 14/60 & -25/60 & 37/60 & -28/60 \\ 0 & 0 & 1 & 34/60 & -35/60 & 47/60 & -8/60 \end{array}\right) \sim (E|X); 1 -$$

вычитаем из элементов третьей строки элементы первой, умноженные на три, а из элементов второй строки элементы первой, умноженные на два;

2 – из элементов третьей строки вычитаем элементы второй строки, умноженные на семь;

3 – к первой строке прибавляем вторую;

4 – к элементам первой строки, умноженным на десять, прибавляем элементы третьей, к элементам второй строки, умноженным на шестьдесят, прибавляем элементы третьей строки, умноженные на одиннадцать;
5 – делим элементы первой строки на десять, второй и третьей на 60, а затем меняем строки местами так, чтобы слева была единичная матрица.
Получили искомую матрицу X:

$$X=\begin{pmatrix} 4/10 & 5/10 & -13/10 & 2/10 \\ 14/60 & -25/60 & 37/60 & -28/60 \\ 34/60 & -35/60 & 47/60 & -8/60 \end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix} 24 & 30 & -78 & 12 \\ 14 & -25 & 37 & -28 \\ 34 & -35 & 47 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Дана система линейных уравнений

$$\text{а)}\ \begin{cases} 5x_1+4x_2-10x_3+7x_4=1 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=1 \\ -x_1+x_2+2x_3-2x_4=1 \\ 7x_1+2x_2-14x_3+11x_4=-1 \\ 12x_1+6x_2-24x_3+18x_4=0 \end{cases};\quad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4 \\ 4x_1+3x_2+12x_3+x_4=5 \\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+7x_2-x_3+2x_4=7 \end{cases}.$$

Проверить совместность системы, пользуясь теоремой Кронекера–Капелли. Если возможно, найти общее решение для соответствующей однородной системы уравнений и фундаментальную систему решений.

Решение. а) Согласно теореме Кронекера–Капелли мы должны сравнить ранг расширенной матрицы $(A|B)$ с рангом основной матрицы A. Приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -10 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & -14 & 11 & -1 \\ 12 & 6 & -24 & 18 & 0 \end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 9 & 0 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & -12 & 10 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\overset{3}{\sim}$$

$$\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

1 – к первой строке прибавили третью, к третьей строке прибавили вторую, из пятой строки вычли удвоенные элементы четвертой строки, из четвертой строки вычли вторую строку;

2 – из первой вычли утроенные элементы третьей строки, элементы четвертой и пятой строк разделили на два;
3 – к пятой строке прибавили вторую строку, из четвертой строки вычли утроенные элементы второй строки;
4 – к элементам четвертой строки прибавили удвоенные элементы третьей, из пятой строки вычли третью, ко второй прибавили третью;
5 – поменяли строки местами так, чтобы матрица приняла ступенчатый вид.
Получили, что ранг (количество оставшихся ненулевых строк) расширенной матрицы равен рангу основной $rang(A|C) = rangA = 3$ и меньше числа неизвестных на единицу, следовательно, система по теореме Кронекера–Капелли совместна, но неопределенна, то есть имеет множество решений.

Полученной матрице соответствует СЛУ: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_2 - x_4 = 2 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Если положить $x_4 = t$, то получим $x_3 = t$ (из третьего уравнения), $x_2 = \frac{t}{3} + \frac{2}{3}$ (из второго уравнения), $x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t$ (из первого уравнения).

Итак, общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ x_2 = \frac{1}{3}(2+t) \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases}$ или в векторной форме $X = \left(\frac{t-1}{3}; \frac{t+2}{3}; t; t\right)^T$,где t – свободная переменная.

Для получения частного решения подставляем свободную переменную. Например, при $t = 1$ получим частное решение $X_1 = (0; 1; 1; 1)$, при $t = 0$ получим частное решение $X_0 = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0; 0\right)$.

Для нахождения общего решения соответствующей однородной системы уравнений заменяем свободные коэффициенты на нули и получаем $\begin{cases} x_1 = t/3 \\ x_2 = t/3 \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases}$, в векторной

форме $X=\left(\frac{t}{3};\frac{t}{3};t;t\right)^T=t\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};1;1\right)^T$. Полученный вектор определяет фундаментальную систему решений: $\left\langle\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

б) Исследуем систему на совместность, для чего приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&3&1&2&4\\4&3&12&1&5\\5&11&3&2&2\\2&5&1&1&1\\1&7&-1&2&7\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}0&-11&3&-2&-10\\0&-25&16&-7&-23\\1&1&1&0&0\\0&-9&3&-3&-13\\1&7&-1&2&7\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}0&-11&3&-2&-10\\0&-25&16&-7&-23\\1&1&1&0&0\\0&-9&3&-3&-13\\0&3&-1&1&3,5\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}0&-11&3&-2&-10\\0&-25&16&-7&-23\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&-2,5\\0&3&-1&1&3,5\end{array}\right);$$

1 – из элементов первой строки вычли удвоенные элементы пятой, из элементов второй строки вычли элементы пятой, умноженные на четыре, из элементов третьей строки вычли удвоенные элементы четвертой, из элементов четвертой строки вычли удвоенные элементы пятой строки;

2 – из пятой строки вычитаем третью, результат делим на два;

3 – из элементов четвертой строки вычитаем утроенные элементы пятой строки.

Видим, что у основной матрицы появилась нулевая строка, тогда как справа от черты стоит – 2,5. Ранг расширенной матрицы равен четырем (количество ненулевых строк), тогда как ранг основной матрицы равен трем (количество ненулевых строк слева от черты). Следовательно, ранг расширенной матрицы больше ранга основной и, согласно теореме Кронекера–Капелли, система несовместна, то есть не имеет решений.

1.4. Аналитическая геометрия

Задача 11. Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$. Найти: 1) уравнение прямой, на которой лежит ребро A_1A_2; 2) уравнение плоскости, на которой лежит грань $A_1A_2A_3$; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды.

Решение.

1) Уравнение прямой, на которой лежит ребро A_1A_2 найдем, используя каноническое уравнение прямой в пространстве, заданной двумя точками:

$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}$, или в нашем случае $\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-7}{2-7}=\frac{z-2}{5-2}$;

Итак, $\frac{x-0}{4}=\frac{y-7}{-5}=\frac{z-2}{3}$ – уравнение прямой, на которой лежит ребро A_1A_2.

2) Точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3 тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1M}$ компланарны, то есть их смешанное произведение равняется нулю. Составим в искомой плоскости $A_1A_2A_3$ три таких вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1M}$, где $M(x;y;z)$ – произвольная точка плоскости.

$\overrightarrow{A_1A_2}=(-4;5;-3)$; $\overrightarrow{A_1A_3}=(-4;0;2)$; $\overrightarrow{A_1M}=(x-4;y-2;z-5)$;

Вычислим смешанное произведение этих векторов и приравняем его к нулю.

$$\left(\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right)=\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(x-4)(10)-(y-2)(-8-12)+(z-5)(20)=$$

$$=10(x-4)+20(y-2)+20(z-5)=0.$$

Сокращая на десять и раскрывая скобки, получим уравнение искомой плоскости $x+2y+2z+14=0$.

3) Угол φ между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ находим по формуле:

$\sin\varphi=\frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_4},\vec{n}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$, где $\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$, его координаты берем из уравнения плоскости $x+2y+2z+14=0$.

$\vec{n}=(1;2;2)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(-3;3;-5)$, $\left(\overrightarrow{A_1A_4},\vec{n}\right)=-3\cdot1+3\cdot2+(-5)(2)=-7$ (скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов);

$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\sqrt{9+9+25}=\sqrt{43}$, $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$ (длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов координат вектора).

Подставляем полученные значения в формулу:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_4}, \vec{n}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{7}{\sqrt{43}\cdot 3} = \frac{7\sqrt{43}}{129}. \text{ Тогда, } \varphi = \arcsin\left(\frac{7\sqrt{43}}{129}\right).$$

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$ находится по формуле $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|$. Вычисляем векторное произведение $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 20\vec{j} + 20\vec{k}$.

Тогда $S = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 400 + 400} = \frac{30}{2} = 15$.

5) Объем пирамиды равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов, то есть одной шестой объема параллелепипеда, построенного на этих векторах $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|$.

Зная координаты вершин пирамиды, найдем координаты соответствующих векторов, вычислим их смешанное произведение.

$\overrightarrow{A_1A_2} = (-4;5;-3)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-4;0;2)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (-3;3;-5)$;

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -4(0-6) - 5(20+6) - 3(-12) = -70.$$

Тогда $V = \frac{1}{6}\cdot 70 = \frac{35}{3}$.

Задача 12. Записать уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{a} = (2;-1;-1)$ и содержащей прямую $l: \begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0, \\ 2x + y - z + 6 = 0. \end{cases}$

Решение. Чтобы записать уравнение плоскости, нам нужно знать нормальный вектор плоскости и точку. Т.к. направляющий вектор данной прямой $\vec{l}$ лежит в искомой плоскости или параллелен ей и вектор $\vec{a}$ параллелен той же плоскости, то нормальный вектор плоскости есть вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{l}$ и $\vec{a}$.

Найдем направляющий вектор прямой $\vec{l} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$, где $\overrightarrow{n_1} = (1;-2;3)$, $\overrightarrow{n_2} = (2;1;-1)$ – нормальные вектора плоскостей, определяющих прямую l:

$\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$. Вычисляем нормальный вектор плоскости:

$$\vec{n}=\left[\vec{l}\times\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 7 & 5\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+9\vec{j}-13\vec{k}.$$

Теперь найдем точку, лежащую в этой плоскости (любую точку прямой *l*). В качестве этой точки можно взять, в частности, точку, у которой z=0. Две другие координаты найдем из уравнения прямой:

$$\begin{cases} z=0\\ x-2y-2=0,\\ 2x+y+6=0.\end{cases} \quad \Rightarrow \quad M(-2;-2;0).$$

Тогда уравнение искомой плоскости: $-2(x+2)+9(y+2)-13z=0$ или $2x-9y+13z-14=0$ (общее уравнение плоскости).

1.5. Комплексные числа

1.5.1. Действия с комплексными числами в алгебраической форме

Задача 13. Вычислить $(3-2i)^2(5+4i)-i^{11}(2-i)$.

Решение. Выполняем действия как с действительными числами, при этом учитываем, что $i^2=-1$.

$$(3-2i)^2(5+4i)-i^{11}(2-i)=(9-12i+4i^2)(5+4i)-(i^2)^5 i(2-i)=$$
$$=(9-12i-4)(5+4i)-(-1)^5(2i-i^2)=(5-12i)(5+4i)+2i-(-1)=$$
$$=25+20i-60i-48i^2+2i+1=26-38i+48=74-38i.$$

Задача 14. Найти значение функции $f(z)=\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{z-i}{2}+i(z-i)^3$ при $z=1+2i$.

Решение. Запишем $f(1+2i)$ и преобразуем полученное выражение, используя следующее правило: при делении на комплексное число вида $a+bi$ нужно числитель и знаменатель дроби умножить на сопряженное число $a-bi$; при этом $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$. Итак,

$$f(1+2i)=\frac{1}{(1+2i)-i}+\frac{(1+2i)-i}{2}+i((1+2i)-i)^3=\frac{1}{1+i}+\frac{1+i}{2}+i(1+i)^3=$$
$$=\frac{1\cdot(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\frac{1+i}{2}+i(1+3i+3i^2+i^3)=\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}+i(1+3i-3-i)=$$
$$=1+i(-2+2i)=1-2i-2=-1-2i.$$

Задача 15. Вычислить $\sqrt{-3+4i}$.

Решение. Известно, что $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=0,1,...,n-1$, $\varphi=\arg z$. Получаем n различных корней.

Иногда, например при $n=2$, более удобно найти корни другим способом.

<u>1ый способ</u>: $-3+4i=-4+1+4i=(2i)^2+4i+1=(2i+1)^2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{-3+4i}=\pm(1+2i)$.

<u>2ой способ</u>: $\sqrt{-3+4i}=a+ib \quad\Rightarrow\quad -3+4i=a^2+2abi+b^2i^2 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad -3+4i=a^2-b^2+2abi$.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Получаем систему:

$$\begin{cases}a^2-b^2=-3,\\ 2ab=4,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a^2-b^2=-3,\\ ab=2.\end{cases}$$

Решаем систему и находим искомые значения корня:

$a_1=1,\ b_1=2,\quad a_2=-1,\ b_2=-2\ \Rightarrow\ \omega_1=a_1+ib_1=1+2i,\ \ \omega_2=a_2+ib_2=-1-2i.$

1.5.2. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме

Задача 16. Вычислить $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12}$.

Решение. Для возведения комплексного числа $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где ρ – модуль z, φ – аргумент z, в степень n используем формулу Муавра:

$z^n=\rho^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$.

Запишем комплексные числа, стоящие в числителе и знаменателе данной дроби в тригонометрической форме.

Для числителя $z_1=1+\sqrt{3}i$:

$$\rho_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2;\quad \varphi_1:\begin{cases}\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y_1}{x_1}=\frac{\sqrt{3}}{1},\\ z_1\in I\,четв.\,(т.к.x_1>0,y_1>0),\end{cases}\quad\Rightarrow\varphi_1=\frac{\pi}{3}.$$

Значит $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Для знаменателя $z_2=1-\sqrt{3}i$:

$$\rho_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2,\quad \varphi_2:\begin{cases}\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{y_2}{x_2}=\frac{-\sqrt{3}}{1},\\ z_2\in IVчетв.(т.к.x_2>0,y_2<0),\end{cases}\quad\Rightarrow\varphi_2=-\frac{\pi}{3}.$$

Значит $z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Так как при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются, то $z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Итак,

$$z^{12}=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{12}=\cos\left(12\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\cos(8\pi)+i\sin(8\pi)=1.$$

Задача 17. Вычислить $\sqrt[5]{\frac{-7+i}{-4-3i}}$ и изобразить полученные корни на комплексной плоскости.

Решение. Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые можно найти по формуле:

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $k=0,1,...,n-1$.

Сначала находим тригонометрическую форму числа $z=\frac{-7+i}{-4-3i}$. Как и в предыдущем примере, ищем тригонометрическую форму для дроби. Отличие в том, что аргументы числителя и знаменателя дроби не являются табличными значениями $\left(\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{1}{-7},\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{-3}{-4}\right)$. Если производить те же вычисления, то они будут очень громоздкими. Для упрощения проведем деление в алгебраической форме, а затем перейдем к тригонометрической форме:

$$z=\frac{7-i}{-4-3i}=\frac{(7-i)(-4+3i)}{(-4-3i)(-4+3i)}=\frac{-28+21i+4i-3i^2}{(-4)^2+(-3)^2}=\frac{-25+25i}{25}=-1+i;$$

$$\rho=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2};\quad \varphi:\begin{cases}\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{-1}=-1,\\ z\in II\ четв.(т.к.\ x<0,y>0),\end{cases}\Rightarrow\varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

Значит $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Извлекаем корень

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{5}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{5}\right)=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi+8\pi k}{20}+i\sin\frac{3\pi+8\pi k}{20}\right)$$

и получаем 5 различных значений при $k=0,1,2,3,4$. Их аргументы $\frac{3\pi}{20},\frac{11\pi}{20},\frac{19\pi}{20},\frac{27\pi}{20},\frac{35\pi}{20}$. Модули этих чисел равны $\sqrt[10]{2}$. Т.е. эти комплексные числа расположены на окружности радиуса $\sqrt[10]{2}$ и делят ее на 5 равных частей

Строим найденные точки (комплексные числа):

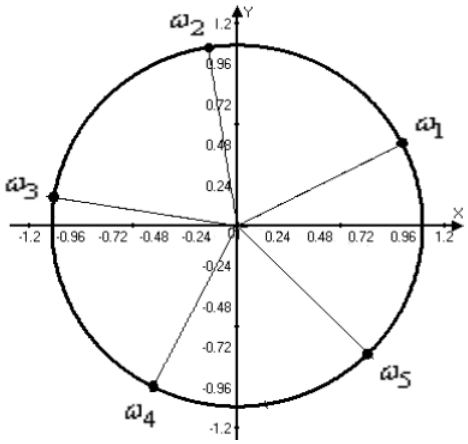

Рис. 8

1.5.3.Решение квадратных уравнений в комплексных числах

Корни квадратного уравнения $az^2+bz+c=0$ вычисляют по формуле:

$z_{1,2}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, где $\sqrt{b^2-4ac}$ – корень второй степени из комплексного числа, имеющий два значения.

Задача 18. Решить уравнение $iz^2+(1-8i)z-7+17i=0$.

Решение. Вычисляем непосредственно по формуле:

$$z_{1,2}=\frac{-(1-8i)+\sqrt{(1-8i)^2-4i(-7+17i)}}{2i}=$$

$$=\frac{-1+8i+\sqrt{1-16i+64i^2+28i-68i^2}}{2i}=\frac{-1+8i+\sqrt{5+12i}}{2i}.$$

Находим значения корня в алгебраической форме (т.к. аргумент числа $z=5+12i$ не является табличным и решение в тригонометрической форме будет не рационально):

$5+12i=9-4+12i=3^2+12i+(2i)^2 \quad\Rightarrow\quad \omega_{1,2}=\sqrt{5+12i}=\pm(3+2i)$.

Находим корни исходного уравнения:

$$z_1=\frac{-b+\omega_1}{2i}=\frac{-1+8i+3+2i}{2i}=\frac{2+10i}{2i}=\frac{-i^2+5i}{i}=5-i,$$

$$z_2=\frac{-b+\omega_2}{2i}=\frac{-1+8i-3-2i}{2i}=\frac{-4+6i}{2i}=\frac{2i^2+3i}{i}=3+2i.$$

1.5.4. Построение множеств на комплексной плоскости

Задача 19. Построить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству: $\operatorname{Re}z^2+2\operatorname{Im}z\le 2$.

Решение. Перейдем к действительным переменным, используя алгебраическую форму записи $z = x + i\,y$:

$\mathrm{Re}(x+i\,y)^2 + 2\,\mathrm{Im}(x+i\,y) \le 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(x^2 + 2x\,y\,i - y^2) + 2\,\mathrm{Im}(x+i\,y) \le 2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2y \le 2$ или $x^2 - (y-1)^2 \le 1$.

Границей искомого множества является гипербола с центром в точке $(0;1)$, действительной осью $y = 1$. Чтобы определить само множество, используем метод пробных точек: точка $(0;\,0)$ удовлетворяет неравенству $x^2 - (y-1)^2 \le 1$. Т.е. точка $z = 0$ входит в искомое множество, а так же все точки, расположенные между ветвями гиперболы. Эти точки и точки, расположенные на гиперболе (т.к. неравенство не строгое) образуют искомое множество.

Строим это множество:

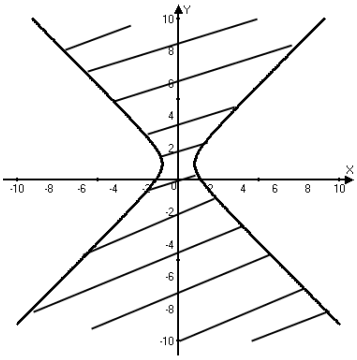

Рис. 9

Задача 20. Построить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению: $|z - 2i| + |z + 2i| = 6$.

Решение. На комплексной плоскости $|z - z_0|$ есть расстояние между точками z и z_0, поэтому искомое множество состоит из точек комплексной плоскости, сумма расстояний от которых до точек $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$ есть величина постоянная, равная $2b = 6$. По определению – это эллипс с фокусами в точках $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, для которого $2c = |z_1 - z_2| = 4$, $b = 3$, $a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{5}$, центр находится в начале координат (посередине между фокусами).

Запишем уравнение эллипса в декартовой системе координат: $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Строим кривую:

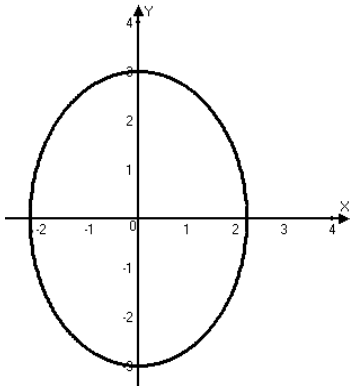

Рис. 10

Задача 21. Построить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению: $z = -3 + 2e^{i\varphi}, \varphi \in [0;\pi/2]$.

Решение. Запишем уравнение в виде $z + 3 = 2e^{i\varphi}$ или $z_1 = 2e^{i\varphi}$. Исходя из показательной формы записи комплексного числа, имеем множество точек z_1 комплексной плоскости, для которых модуль $\rho = 2$, а аргумент $\varphi \in [0;\pi/2]$, т.е. эти точки образуют часть окружности с центром в начале координат и радиуса 2, расположенную в I четв Тогда искомое множество $z = -3 + z_1$ получается сдвигом на вектор $(-3;0)$.

Строим соответствующий график:

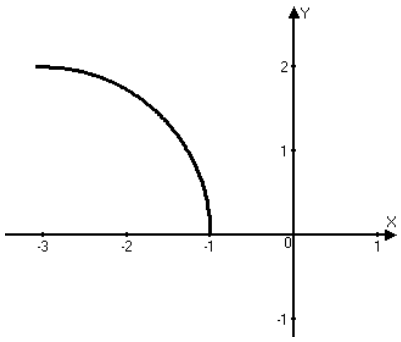

Рис. 11

2.Индивидуальные задания по курсу «Алгебра и аналитическая геометрия»

Вариант 1

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 2 = 0$; b) $x = -4 - \sqrt{5 - 5y^2 - 20y}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$; b) $\left(x^2 + y\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = (e^t + e^{-t})/2, \\ y = (e^t - e^{-t})/2. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найти общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 10x_4 = 7, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 18x_4 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX = B - A$.

8. Даны четыре точки $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$.

10. Доказать параллельность прямых $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ и $\begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x+6z-6=0. \end{cases}$

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{1+i}{4}\right)^7$; b) $f(z)=(z-1)^5+\dfrac{1}{z-3}$. Найти $f(1+2i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt{8-6i}$; b) $\sqrt[4]{-1}$; c) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2+(1-2i)z+2(-i)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z-3i|\ge 3$; b) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=1$;
c) $|z-2i|+|z+2i|=8$; d) $|z-2i|=|z+2i|$.

Вариант 2

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые (указать тип кривой):

a) $y = 1 - 2\sqrt{x^2 - 4x + 6}$; b) $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат (указать именные кривые):

a) $\rho = --4/\sin\varphi$; b) $x^4 + y^4 = 9x^2$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями (указать именные кривые):

a) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = \sqrt{4 - t^2}, \\ y = t + 3. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 12x_4 = -5, \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 16x_4 = -5, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -5, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 = -13, \\ 6x_1 - x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 13. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=B-A$.

8. Даны четыре точки $A_1(3;-1;2)$, $A_2(-1;0;1)$, $A_3(1;7;3)$, $A_4(8;5;8)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1;5;6)$, $M_2(-1;7;10)$.

10. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{15}$; b) $f(z)=z^4+3z^2+1$. Найти $f(1-i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[6]{-64}$; b) $\sqrt{-7+24i}$; c) $\sqrt{\frac{1+2i}{1-3i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-(4-3i)z+7-i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+i|=3$; b) $|z-i|+|z+2i|=5$;
c) $\mathrm{Re}(z+3i-1)=4$; d) $|z|\geq 1-\mathrm{Im}(z)$.

Вариант 3

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые (указать тип кривой):

a) $y=-2\sqrt{9-x^2-8x}$; b) $-x^2+9y^2-54y-6x+81=0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат (указать именные кривые):

a) $\rho=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$; b) $\left(x^2+y^2\right)^2=9xy$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями (указать именные кривые):

a) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=3\sin t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-1-4t^2+4t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 5x_1+7x_2+2x_3+26x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-8x_3+11x_4=27, \\ -8x_1+2x_2+9x_3-2x_4=-25, \\ 2x_1-6x_2+8x_3-16x_4=-30, \\ x_1-7x_2+3x_3-20x_4=-16. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 9 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=-AB$.

8. Даны четыре точки $A_1(2;4;3)$, $A_2(1;1;5)$, $A_3(4;9;3)$, $A_4(3;6;7)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью *Oxy* и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-3;5)$ параллельно плоскости *Oxy*.

10. Доказать, что прямая $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{6}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases}2x+y-4z+2=0\\ 4x-y-5z+4=0\end{cases}$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $(-1+i)^{15}$; b) $f(z)=z^8+2z^4$. Найти $f(1+i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt{-15+8i}$; b) $\sqrt[4]{-16}$; c) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+2+i|\le 2$; b) $z=3+2e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le\pi)$;
c) $\mathrm{Re}(z^2)=5$; d) $|z-2|-|z+2|\ge 3$.

Вариант 4

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые (указать тип кривой):

a) $x = -4 + \sqrt{\dfrac{y^2 - 4y + 7}{3}}$; b) $y^2 - 2y - 3x - 14 = 0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат (указать именные кривые):

a) $\rho = 10\sin 4\varphi$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями (указать именные кривые):

a) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^2. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 16x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 23x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -19, \\ 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 35x_4 = -6, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 21x_4 = 12. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=-A$.

8. Даны четыре точки $A_1(3;5;4)$, $A_2(5;8;3)$, $A_3(1;2;-2)$, $A_4(-1;0;2)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Найти расстояние от точки $M(2;0;-0,5)$ до плоскости $4x-4y+2z+17=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-3;3)$ и образующей с осями координат углы соответственно равные 60°, 45° и 120°.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3$; b) $f(z)=(z-1)^5+z^5$. Найти $f(1-i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[7]{1-i}$; b) $\sqrt{3+4i}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{2i}{1+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2+(1-2i)z-2i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+2i+1|=1$; b) $\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$;
c) $|z|<1-\mathrm{Re}(z)$; d) $|z-1|+|z-3|=4$.

Вариант 5

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые (указать тип кривой):

a) $x = 2 + \sqrt{6y - y^2 - 5}$; b) $2x^2 - 16x - y + 18 = 0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат (указать именные кривые):

a) $\rho = 1 - \cos\varphi$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями (указать именные кривые):

a) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = 2t; \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 3 + 5\cos t, \\ y = 1 + 5\sin t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 30x_4 = -2, \\ -5x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 19x_4 = 18, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 17x_4 = -5, \\ 8x_1 - 8x_2 + x_3 - 8x_4 = -19, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=-BA$.

8. Даны четыре точки $A_1(9;5;5)$, $A_2(-3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$, $A_4(6;9;2)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2;5;-1)$.

10. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3;6;-7)$, $B(-5;1;-4)$, $C(0;2;3)$ проведенной из вершины C.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$; b) $f(z)=\dfrac{z+1}{2}+z^3+1$. Найти $f(-1+2i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[7]{1+i}$; b) $\sqrt{3+4i}$; c) $\sqrt{\dfrac{1-3i}{1+2i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $(1+i)z^2+(3-i)z+2(1-i)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+2i+1|\le\sqrt{5}$; b) $0<\mathrm{Re}(iz)<1$;
c) $|z|+|z+1|=1$; d) $z=3+4e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Вариант 6

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые (указать тип кривой):

a) $y^2 - 5x^2 + 10y - 30x - 45 = 0$; b) $y = -5 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 6x - 7}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат (указать именные кривые):

a) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4xy\left(x^2 - y^2\right)$; b) $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями (указать именные кривые):

a) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a + b\sin t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 35x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 16x_4 = -13, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 21x_4 = 16, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 14x_4 = -7, \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -12. \end{cases}.$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=-BA$.

8. Даны четыре точки $A_1(0;7;1)$, $A_2(2;-1;5)$, $A_3(1;6;3)$, $A_4(3;-9;8)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью *Oxy* и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;5;-1)$; $B(-3;1;3)$ параллельно оси *Oy*.

10. При каком значении n прямая $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{n}=\dfrac{z}{1}$ параллельна прямой $\begin{cases}x+y-z=0,\\ x-y-5z-8=0.\end{cases}$

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9$; b) $f(z)=z^3-3z^2$. Найти $f(1+2i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{24+10i}$; c) $\sqrt{\dfrac{3+i}{-2+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-(7+i)z+12-i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z-1+i|\ge\sqrt{2}$; b) $0<\mathrm{Re}(iz)<1$;
c) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=2$; d) $|2z|=|1+z|$.

Вариант 7

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $2x^2 - 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$; b) $y = 2 + \sqrt{2x - 8}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4xy\left(x^2 - y^2\right)$; b) $\rho = -\dfrac{1}{\sin\varphi}$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t; \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \\ y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 13x_4 = 7, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ -3x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ -2x_1 + 12x_2 + 4x_4 = -4. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=B-A$.

8. Даны четыре точки $A_1(5;5;4)$, $A_2(1;-1;4)$, $A_3(3;5;1)$, $A_4(5;8;-1)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;4;0)$ и прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

10. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^6$; b) $f(z)=z^3+z^2+z+1$. Найти $f(1-2i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt{3-4i}$; b) $\sqrt[5]{1}$; c) $\sqrt{\dfrac{1-2i}{1+3i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $iz^2+(2+i)z+2=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+2+i|\le 3$; b) $|z|>1-\operatorname{Im}(z)$;
c) $|z+2|+|z-3|=9$; d) $z=2i+3e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi<2\pi)$.

Вариант 8

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $3x^2 + 50x - y + 76 = 0$; b) $y = 2 + \sqrt{4x - x^2}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = 2\sin 5\varphi$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = t^3 - 3t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 31x_4 = -13, \\ 4x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 17x_4 = 14, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 14x_4 = 12, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 14x_4 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 - 8x_3 - 8x_4 = 19. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=B$.

8. Даны четыре точки $A_1(6;1;1)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;6)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

10. Найти проекцию точки $P(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$; b) $f(z)=z^8+z^4+1$. Найти $f\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt{3+4i}$; b) $\sqrt[6]{-8}$; c) $\sqrt{\frac{2+i}{-3+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $(2+i)z^2-(5-i)z+2(1-i)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z-3+2i|=5$; b) $|z-1|+|z+2|=4$;
c) $|z|\le 1-\mathrm{Re}(z)$; d) $|z-i|=|z+2i|$.

Вариант 9

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $3y^2 - 18x - 6y - 9x^2 - 27 = 0$; b) $x = 3 + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 + 6y + 10}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = \sin(4\varphi)$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = -1 + 2\cos(t), \\ y = a\sin(t); \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 1 - 4t^2. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 17x_4 = 21, \\ 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 12x_4 = -4, \\ x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 = -21, \\ 7x_1 + 9x_2 + x_3 + 25x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX = BA$.

8. Даны четыре точки $A_1(7;5;3)$, $A_2(9;4;4)$, $A_3(4;5;7)$, $A_4(7;9;6)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3;2;-5)$.

10. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\frac{1-i}{2}\right)^{23}$; b) $f(z) = z^4 + 2z^2$. Найти $f(1-i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[6]{1-i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{-7+24i}$; c) $\sqrt{\frac{1-3i}{2i+1}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2 + (7+i)z + 12 - i = 0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z + 2i| \le 2$; b) $0 < \mathrm{Re}(z) < 4$;
c) $\mathrm{Im}(z^2 - 1) = 1$; d) $z = 3i + 4e^{i\varphi}$, $(-\pi \le \varphi \le \pi)$.

Вариант 10

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x^2+5y^2+2x+10y-19=0$; b) $x=-3-\sqrt{4y+12}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho=\dfrac{5}{\cos\varphi}$; b) $\left(x^2+y^2\right)^2=9xy$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}\cos^2(t), \\ y=\dfrac{3}{2}\sin(2t); \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=t^2-2, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6, \\ 5x_2+4x_3=-20, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+9x_3+11x_4=5, \\ 5x_1-9x_2-2x_3+x_4=-16, \\ 4x_1+8x_2+5x_3+16x_4=11, \\ 8x_1+8x_2-2x_3+24x_4=18, \\ -5x_1-x_2+5x_3-11x_4=-7. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3=0, \\ 7x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=\left(AB\right)^T$.

8. Даны четыре точки $A_1(6;8;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;3;7)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6;-10;1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a=-3$, а на оси Oz − отрезок $c=2$.

10. При каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны?

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; b) $f\left(z\right)=z^6+3z^2$. Найти $f\left(1-i\right)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[7]{1-i}$; b) $\sqrt{-24-10i}$; c) $\sqrt{\dfrac{7-i}{-3+4i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-\left(1+i\right)z+2\left(1+i\right)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $\left|z-1+i\right|\le 2$; b) $\left|z+i\right|+\left|z-2i\right|=5$;
c) $0<\mathrm{Im}\left(z^2-1\right)<1$; d) $z=\pi+4e^{i\varphi}$, $\left(0\le\varphi\le 2\pi\right)$.

Вариант 11

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$; b) $y = -3 + \sqrt{-4x^2 + 24x - 20}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = -\dfrac{4}{\sin(\varphi)}$; b) $\rho = 2 + \cos(\varphi)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 4t^2 - 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a(t - \sin(t)), \\ y = a(1 - \cos(t)). \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 13x_4 = -20, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 10x_4 = 23, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 15x_4 = -3, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -11. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=(BA)^{-1}$.

8. Даны четыре точки $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;1)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-4)$ параллельно двум векторам $a=(4;1;-1)$ и $b=(2;-1;2)$.

10. При каких значениях m и C прямая $\dfrac{x-2}{m}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}$; b) $f(z)=z^5+z^2+1$. Найти $f\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[4]{-16}$; b) $\sqrt{24-10i}$; c) $\sqrt[4]{\dfrac{1+i}{1-i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $(1+i)z^2+(3-i)z+2(1-i)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+2i+1|\le\sqrt{5}$; b) $0<\mathrm{Re}(iz)<1$;
c) $|z|+|z+1|=1$; d) $z=3+4e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Вариант 12

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $y = 1 - 0,5\sqrt{x^2 - 4x + 6}$; b) $2x^2 - y^2 - 12x + 6y + 7 = 0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = 2\cos(4\varphi)$; b) $\rho = e^{\varphi}$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \sqrt{2t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 13, \\ -3x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 12x_4 = -11, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 0, \\ 6x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -2, \\ -4x_1 - 9x_2 + 8x_3 - 17x_4 = -13. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=\left(BAB\right)^{-1}$.

8. Даны четыре точки $A_1(4;4;10)$, $A_2(7;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;9)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;1;0)$, $B(2;-1;-1)$ перпендикулярно плоскости $5x+2y+3z-7=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $\begin{cases}x=2t+5,\\y=-3t+1,\\z=-7t-4.\end{cases}$

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:

a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{15}$; b) $f\left(z\right)=\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$. Найти $f\left(2+3i\right)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

a) $\sqrt[5]{-1}$; b) $\sqrt{7+24i}$; c) $\sqrt[7]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $\left(1+i\right)z^2+\left(3-i\right)z+2\left(1-i\right)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

a) $\left|z+2i+1\right|\le\sqrt{5}$; b) $0<\mathrm{Re}\left(iz\right)<1$;

c) $\left|z+i\right|+\left|z-2i\right|=5$; d) $z=3+4e^{i\varphi}$, $\left(0\le\varphi\le2\pi\right)$.

Вариант 13

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $y=-5+\sqrt{2(x-1)}$; b) $x^2-3y^2+6x+30y-75=0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho=2\cos(\varphi)$; b) $\left(x^2+y^2\right)^2 x=y$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=3t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=t-\sin(t), \\ y=1-\cos(t). \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ x_1+x_2+2x_3=8. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} x_1-2x_3-x_4=-2, \\ -x_1+4x_2-6x_3-x_4=-4, \\ 2x_1-4x_2+8x_3+2x_4=8, \\ -6x_1+12x_2-20x_3-4x_4=-18, \\ -6x_1+12x_2-16x_3-2x_4=-12. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0, \\ x_1-2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1 \qquad -9x_3=0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=\left(AB\right)^{-1}$.

8. Даны четыре точки $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x-3y+z-1=0$ и $x-y+5z+3=0$.

10. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0;0;2)$, $B(4;2;5)$ и $C(12;6;11)$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\dfrac{(1-i)^{15}}{32}$; b) $f(z)=\dfrac{z+3}{z-3}$. Найти $f(3i)+f(-3i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[5]{32}$; b) $\sqrt{3+4i}$; c) $\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{128}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-(11+4i)z+33+13i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z-1|+|z+2|=5$; b) $1\le|z+1+3i|\le 2$;
c) $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)<1$; d) $z=-2+e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Вариант 14

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x = 2 + \sqrt{-y^2 + 6y - 5}$; b) $3x^2 + 30x - y + 76 = 0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -1 - 4t^2 + 4t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}.$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 = -18, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 16x_4 = -15, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -17, \\ 7x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_4 = 25, \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=B^{-1}$.

8. Даны четыре точки $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;-1;2)$, $B(2;1;4)$ параллельно вектору $a=(5;-2;-1)$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-5;3)$ параллельно прямой $\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{15}$; b) $f(z)=\dfrac{(z+1)^2}{z^2+1}$. Найти $f(1-i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[4]{-1}$; b) $\sqrt{3-4i}$; c) $\sqrt{\dfrac{-1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-(3-i)z+4=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $1\le|z-1+i|\le 3$; b) $|z-i|-|z-2i|=1/4$;
c) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=1$; d) $|z|=|z+5|$.

Вариант 15

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x^2 + 2y^2 - 4x - 1 = 0$; b) $y = 5 + \sqrt{\dfrac{x-5}{6}}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = t^3 - 3t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 16x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 14x_4 = -18, \\ -9x_1 + x_2 + 5x_3 - 16x_4 = -8, \\ -7x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 16, \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=\left(BA\right)^{-1}$.

8. Даны четыре точки $A_1(10;9;6)$, $A_2(2;8;2)$, $A_3(9;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(5;-2;3)$, $B(1;-3;5)$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3;4)$ перпендикулярно к прямым $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ и $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)^{15}$; b) $f\left(z\right)=z^2+\bar{z}$. Найти $f\left(1-i\right)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{5+12i}$; c) $\sqrt{\dfrac{-1+3i}{1+2i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-5z+5+3i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $\left|z+3i\right|\le 5$; b) $z=1+2e^{i\varphi}$, $\left(0\le\varphi\le 2\pi\right)$;
c) $\operatorname{Im}\left(z^2\right)=2$; d) $\left|z+1+i\right|=\left|z\right|$.

Вариант 16

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x^2 + y^2 - 2y + 4x - 4 = 0$; b) $x = 1 - \sqrt{2y^2 + 6}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = 3 + \cos 4\varphi$; b) $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = t^2 - 2, \\ y = \dfrac{1}{3}t^3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = t - 4. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + x_3 + 26x_4 = 13, \\ -8x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 33, \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 + 17x_4 = 11, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 + 13x_4 = -11, \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}5&4&2\\1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=A$.

8. Даны четыре точки $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2;-3;3)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$.

10. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна к прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$?

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^5$; b) $f(z)=5z^2+2z$. Найти $f(2+3i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[7]{1}$; b) $\sqrt{4+2\sqrt{5}i}$; c) $\sqrt{\dfrac{8+6i}{7-i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-3z+3+i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z-3i|\le 1$; b) $z=-2+3e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$;
c) $\operatorname{Im}(z^2)=8$; d) $|z+1-2i|=|z|$.

Вариант 17

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y = 0$; b) $y = -2 + \sqrt{6 - 3x^2 - 6x}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = 3\sin\varphi$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 1.5\cos^2 t, \\ y = \dfrac{3}{2}\sin 2t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + x_3 + 24x_4 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 16x_4 = -6, \\ -2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 22, \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 16x_4 = -12, \\ -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=\left(BA\right)^{-1}$.

8. Даны четыре точки $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-1;2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2;3;-4)$, $M_2(-1;2;-3)$.

10. Показать, что прямая $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{-8}=\dfrac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $\begin{cases}x=t+7,\\ y=t-2,\\ z=2t+1,\end{cases}$ лежит на этой плоскости.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{2+2i}{\sqrt{2}}\right)^6$; b) $f\left(z\right)=z^4+z$. Найти $f\left(1+i\right)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$; b) $\sqrt{12+16i}$; c) $\sqrt{\dfrac{-2i}{1-i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-\left(3+2i\right)z+1+3i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $\left|z+2i\right|\le 3$; b) $z=1+e^{i\varphi}$, $\left(0\le\varphi\le 2\pi\right)$;
c) $\operatorname{Im}\left(z^2\right)=1/2$; d) $\left|z+2-3i\right|=\left|z\right|$.

Вариант 18

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x^2 + 2y^2 - 4x - 1 = 0$; b) $y = 3 - \sqrt{1 - 2x}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = \sin\varphi$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}.$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 35x_4 = -10, \\ -6x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 26, \\ -8x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 31x_4 = -22, \\ 2x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 17x_4 = -38, \\ -5x_1 - 3x_2 - x_3 - 19x_4 = -3. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX = A$.

8. Даны четыре точки $A_1(7;2;2)$, $A_2(-5;7;-7)$, $A_3(5;-3;1)$, $A_4(2;3;7)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Показать, что прямая $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{8}=\dfrac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z-1=0$, а прямая $\begin{cases} x=t+7, \\ y=t-2, \\ z=2t+1. \end{cases}$ лежит в этой плоскости.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3;1;-2)$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:

a) $\left(\dfrac{1+5i}{\sqrt{5}}\right)^4$; b) $f(z)=3z^3+z$. Найти $f(3-i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

a) $\sqrt[5]{-1}$; b) $\sqrt{4-3i}$; c) $\sqrt{\dfrac{2+4i}{3+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-4z+4+2i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

a) $|z-2i|\le 2$; b) $z=-2+3e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$;

c) $\operatorname{Im}(z^2)=1$; d) $|z+3-i|=|z|$.

Вариант 19

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $3x^2 + 30x - y + 76 = 0$; b) $x = 3 - \sqrt{(y^2 - 10y + 21)/2}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = 2\sin(2\varphi)$; b) $\rho = a(1 - \cos(\varphi))$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -1 - 4t^2 + 4t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 10x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 - 12x_3 + 20x_4 = -2, \\ 8x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 25x_4 = 14. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX=B$.

8. Даны четыре точки $A_1(8;-6;4)$, $A_2(10;5;-5)$, $A_3(5;6;-8)$, $A_4(8;10;7)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-4;1)$ параллельно координатной плоскости Oxz.

10. Показать, что прямые $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-3z+1=0,\\ 2x+3y-8z+3=0,\end{cases}$ перпендикулярны.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}}\right)^{10}$; b) $f(z)=2z^2+3z$. Найти $f(2+i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{5+12i}$; c) $\sqrt{\dfrac{1+5i}{3+2i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2+(1-2i)z-2i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+2+i|\le 2$; b) $z=2+1e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$;
c) $\mathrm{Re}(z^2)=2$; d) $|z+4+2i|=|z|$.

Вариант 20

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $y=-5+\sqrt{2(x-1)}$; b) $x^2-3y^2+6x+30y-75=0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\left(x^2+y^2\right)^2 x=y$; b) $\rho=a(1+\sin(\varphi))$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=2t^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=t-\sin(t), \\ y=1-\cos(t). \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=-11, \\ 5x_1+x_2+2x_3=8, \\ x_1+2x_2+4x_3=16. \end{cases}.$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 8x_1+8x_2+5x_3+24x_4=11, \\ 3x_1-4x_2+2x_3+2x_4=-10, \\ 3x_1+3x_2+x_3+9x_4=5, \\ 6x_1-6x_2-8x_3+6x_4=-4, \\ -2x_1+x_2+9x_3-3x_4=-7. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX = AB$.

8. Даны четыре точки $A_1(1;-1;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3;-5;2)$.

10. При каком значении D прямая $\begin{cases}3x-y+2z-6=0,\\ x+4y-z+D=0,\end{cases}$ пересекает ось Oz?

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{3-3i}{\sqrt{2}}\right)^5$; b) $f(z)=3z^2-z$. Найти $f(2-3i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[4]{-2}$; b) $\sqrt{4+3i}$; c) $\sqrt{\dfrac{4-2i}{3+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z+2i|<1$; b) $|z+2i+1|=1$;
c) $|z|<1-\mathrm{Re}(z)$; d) $\arg(z)=\dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 21

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x = 3 + \sqrt{0,5y^2 - 5y + 10,5}$; b) $2x^2 - y - 4x + 11 = 0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = 2 + \cos(\varphi)$; b) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 4t^2 - 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 0.3\cos(t), \\ y = 4\sin(t). \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ -6x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 9x_4 = -6, \\ -8x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 12x_4 = -8, \\ -3x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 12x_4 = -12. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX = A$.

8. Даны четыре точки $A_1(1;-2;7)$, $A_2(4;2;10)$, $A_3(2;3;5)$, $A_4(5;3;7)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;2;3)$ и $N(-3;4;-5)$ параллельно оси Oz.

10. При каком значении p прямые $\begin{cases}x=2t+5,\\ y=-t+2,\\ z=pt-7,\end{cases}$ и $\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\ x-y-3z-2=0,\end{cases}$ параллельны?

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{5+5i}{\sqrt{5}}\right)^6$; b) $f(z)=3z^2+2z$. Найти $f(1-5i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+3i}$; b) $\sqrt{2+i\sqrt{5}}$; c) $\sqrt{\dfrac{4+6i}{5+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-(4-3i)z+7-i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=1$; b) $\mathrm{Re}(z+3i-1)=4$;
c) $|z-1|+|z-3|=4$; d) $|z+2+i|>2$.

Вариант 22

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $x = 1 + \sqrt{4y - y^2}$; b) $5x^2 - y^2 + 40x - 4y + 51 = 0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = \sin(4\varphi)$; b) $\left(x^2 + y^2\right)x = a^2 y$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = -1 + 2\cos(t), \\ y = a\sin(t); \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 1 - 4t^2. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 34x_4 = 8, \\ -8x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 26, \\ 4x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 24x_4 = 34, \\ 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = -18, \\ 5x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = -22. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 9 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $AX = AB$.

8. Даны четыре точки $A_1(4;2;10)$, $A_2(1;2;0)$, $A_3(3;5;7)$, $A_4(2;-3;5)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ и прямую $\begin{cases}x=t-3,\\ y=2t+5,\\ z=-3t+1.\end{cases}$.

10. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-8=0$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:

a) $\left(\dfrac{1+3i}{\sqrt{6}}\right)^5$; b) $f(z)=5z^2+z$. Найти $f(4+i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

a) $\sqrt[5]{16}$; b) $\sqrt{5+12i}$; c) $\sqrt{\dfrac{7+5i}{6-i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $(2+i)z^2-(5-i)z+2(1-i)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

a) $|z+3i-2|>2$; b) $z=3+e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$;

c) $\mathrm{Re}\left(z^2-1\right)=1$; d) $|z+i|=|z|$.

Вариант 23

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $y=-2-\sqrt{5x^2+40x+105}$; b) $3x^2+50x-y+76=0$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho=2\sin 5\varphi$; b) $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=t^3-3t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3=9, \\ x_1+3x_2+x_3=5. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3+12x_4=3, \\ 2x_1-9x_2-4x_3-5x_4=-14, \\ 3x_1+7x_2-3x_3+13x_4=17, \\ x_1+6x_2+2x_3+8x_4=10, \\ 6x_1-3x_2-4x_3+9x_4=-2. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3=0, \\ x_1+11x_2=0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX=\left(BA\right)^{-1}$.

8. Даны четыре точки $A_1(2;3;5)$, $A_2(5;3;-7)$, $A_3(1;2;7)$, $A_4(4;2;0)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью *Oxy* и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Найти проекцию точки $M(4;-3;1)$ на плоскость $x-2y-2z-15=0$.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2;-5;3)$ параллельно плоскости *Oxz*.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:

a) $\left(\dfrac{4+4i}{\sqrt{2}}\right)^6$; b) $f\left(z\right)=z^2+5z$. Найти $f\left(3+i\right)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

a) $\sqrt[7]{-1}$; b) $\sqrt{8+6i}$; c) $\sqrt{\dfrac{6-4i}{5+i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $iz^2+\left(2+i\right)z+2=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

a) $0<\mathrm{Re}\left(iz\right)<1$; b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=2$;

c) $\mathrm{Im}\left(z^2\right)>2$; d) $\left|z+5\right|=\left|z\right|$.

Вариант 24

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $2x^2 - 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$; b) $y = 2 + \sqrt{2x - 8}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$; b) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = 2t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 + 5\cos t, \\ y = 1 + 5\sin t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 5, \\ 2x_1 - 9x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -9, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -1, \\ -6x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 16, \\ -5x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 8x_4 = -3. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX = A$.

8. Даны четыре точки $A_1(5;3;7)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(4;2;10)$, $A_4(1;2;7)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Определить, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By-10z-3=0$ будут перпендикулярны.

10. Составить общие уравнения прямой, образованные пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5;3;2)$.

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{1+5i}{\sqrt{6}}\right)^4$; b) $f(z)=2z^2+5z$. Найти $f(5+i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[5]{-1}$; b) $\sqrt{24+10i}$; c) $\sqrt{\dfrac{6+4i}{5-i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $(2+i)z^2-(5-i)z+(1-i)=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|z|\le 1-\mathrm{Re}(z)$; b) $z=4+2e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$;
c) $|z-1+i|\ge\sqrt{2}$; d) $|z+2|=|z|$.

Вариант 25

1. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

a) $2x^2 - 16x - y + 18 = 0$; b) $y = -1 - \sqrt{\dfrac{x+1}{5}}$.

2. Построить кривые в полярной системе координат:

a) $\rho = 1 - \cos\varphi$; b) $\rho = -\dfrac{1}{\sin\varphi}$.

3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

a) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -1 - 4t^2 + 4t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

4. Решить, если возможно, систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}.$$

5. Для заданной системы уравнений найдите общее решение и, для соответствующей однородной системы уравнений, фундаментальную систему решений и фундаментальную матрицу.

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -6, \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 16x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальную матрицу решений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Для данных матриц A и B проверить: а) являются ли матрицы перестановочными; б) являются ли матрицы вырожденными; в) в случае невырожденности найти обратные матрицы методом Гаусса и методом присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 9 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix};$$

г) найти матрицу X из уравнения $BX = A$.

8. Даны четыре точки $A_1(4;3;5)$, $A_2(1;9;7)$, $A_3(0;2;0)$, $A_4(5;3;10)$.
Составить уравнения: *а*) плоскости $A_1A_2A_3$; *б*) прямой A_1A_2; *в*) прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$ и проходящей через точку A_4; *г*) прямой, параллельной прямой A_1A_2 и проходящей через точку A_3; *д*) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-3;-4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

10. При каких значениях B и D прямая $\begin{cases}x-2y+z-9=0,\\ 3x+By+z+D=0,\end{cases}$ лежит в плоскости Oxy?

11. Для комплексных чисел выполнить указанные действия:
a) $\left(\dfrac{3+3i}{\sqrt{3}}\right)^6$; b) $f(z)=z^3+2z$. Найти $f(2-i)$.

12. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
a) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; b) $\sqrt{3-4i}$; c) $\sqrt{\dfrac{5+3i}{3-2i}}$.

13. Решить квадратное уравнение $z^2-z+5+3i=0$; корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить на комплексной плоскости.

14. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
a) $|2z|=|1+z|$; b) $z=3+2e^{i\varphi}$, $(0\le\varphi\le\pi)$;
c) $|z|\ge 1-\operatorname{Im}(z)$; d) $|z-1|+|z-3|=4$.

Библиографический список

1. Данко П.Е, Высшая математика в упражнениях и задачах/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова: учеб.пособие для втузов. Ч.2. 5-е изд., испр. М.: Высш.шк., 1997. 416 с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии/ Д.В. Клетеник: учеб.пособие для втзов. 17-е изд. СПб.: Изд-во «Профессия», 2003. 200с.
3. Краснов М.Л. Вся высшая математика/ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 352с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике/Д.Т. Письменный. Ч.1. М.: Айрис-пресс, 2003. 288с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ под.ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1996. 464 с.

Учебное пособие

Михалёва Марина Михайловна
Симонова Анна Сергеевна

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания и домашние задания

Редактор

Компьютерная верстка М.М. Михалёва, А.С. Симонова

Пописано в печать			Формат 60×84 1/16
Бумага типографская		Плоская печать	Усл. печ. л. 2,32
Уч.-изд. л. 2,3	Тираж	экз Заказ	

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19