А.В. Зенков

Ряды и ряды Фурье

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет–УПИ»

А.В. Зенков

РЯДЫ
и
РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебник
для студентов физических специальностей

Екатеринбург
2010

УДК 512 (075.8)
ББК 22.37
З30

Рецензенты:

кафедра математики Уральского государственного горного университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В.Б. Сурнев);

д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института математики и механики УрО РАН
В.С. Балаганский

Зенков А.В.

З30 **Ряды и ряды Фурье**: Учебник для студентов физических специальностей / А.В. Зенков. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2010. 77 с.; ил.

ISBN 5-321-00363-9

Учебник подготовлен на основе расширенного текста лекций по дисциплине "Ряды и ряды Фурье, дифференциальные уравнения, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра", читавшихся автором в течение длительного времени студентам физических специальностей физико-технического факультета УГТУ–УПИ в весеннем семестре I курса.

Настоящее издание включает только ряды и ряды Фурье, а остальные заявленные темы составляют предмет одновременно публикуемой отдельной книги.

В конце приведён список изданий, повлиявших на содержание данного учебника и/или рекомендуемых автором для желающих изучить предмет более углублённо.

В оформлении обложки использованы картины К. Хокусаи (20-е гг. XIX в.) и А. Хиросиге (1858).

Библиогр.: 13 назв. Рис.15.

УДК 512 (075.8)
ББК 22.37

ISBN 5-321-00363-9

Глава I

РЯДЫ

1. Основные определения

Пусть $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$ — последовательность комплексных чисел. Выражение вида $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется (числовым) *рядом*. Данное определение пока *формально*, поскольку сумма *бесконечного* числа слагаемых нуждается в толковании.

u_n — n-е слагаемое ряда. Сумма первых n слагаемых

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$$

называется n-й *частичной суммой* ряда. Слагаемые, следующие за n-й частичной суммой, образуют n-й *остаток ряда* R_n:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots = R_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, если существует к о н е ч н ы й предел его n-й частичной суммы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если данный предел равен бесконечности или не существует, то ряд называется *расходящимся*. Для сходящегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ называется *суммой* ряда.

П р и м е р 1. Для ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ частичная сумма при чётном числе слагаемых $S_{2n} = 0$, а при нечётном $S_{2n+1} = 1$. Очевидно, что две подпоследовательности частичных сумм сходятся к р а з н ы м пределам, общий предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует; ряд р а с х о д и т с я.

П р и м е р 2. Для ряда $a + aq + aq^2 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, слагаемые которого образуют геометрическую прогрессию, n-я частичная сумма, как известно, выражается формулой $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. Если $|q| < 1$ (прогрессия бесконечно убывающая), то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ и ряд сходится.

При $|q| > 1$ ряд р а с х о д и т с я, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

2. Свойства сходящихся рядов

1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то его почленное умножение на константу приводит снова к сходящемуся ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,u_n$, *причём* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,u_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Действительно, образовав частичные суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ и $\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n$, видим, что $\sigma_n = cS_n$. Равенство не нарушится и после совершения предельного перехода: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = c\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Отсюда следует, что, во-первых, предел слева существует (поскольку, по условию, существует предел справа), и, во-вторых, что суммы рядов связаны тем же соотношением $\sigma = cS$, что и соответствующие слагаемые.

Итак, вынесение общего множителя за скобку законно не только для конечной суммы, но и для сходящегося ряда.

2. *Если каждый из двух рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ *тоже сходится и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Доказательство аналогично предыдущему. Это свойство также роднит сходящийся ряд с конечной суммой.

3. *На сходимость (расходимость) ряда не влияет добавление, убавление или изменение величины конечного числа слагаемых.*

Пусть, например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ образована n-я частичная сумма $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. Рассмотрим другой ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} u_n$, отличающийся от первого тем, что первые два слагаемых стали равными нулю; соответственно частичная сумма $\sigma_{n-2} = u_3 + \ldots + u_n$. Очевидно, что $S_n = u_1 + u_2 + \sigma_{n-2}$. По свойствам предельного перехода

$$\lim_{n\to\infty} S_n = u_1 + u_2 + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-2}.$$

Если существует (не существует) предел в одной части равенства, то же будет иметь место и для другой его части.

4. **Критерий Коши** [1] **сходимости ряда**

[1] Огюстен Луи Коши (A.L. Cauchy, 1789-1857), франц. математик. Написал 789 работ по математике и математической физике. Его курсы математического анализа, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для учебников позднейшего времени. Ярый

Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N > 0$, $N = N(\varepsilon)$, *что* $\forall n > N$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$ *выполнялось условие*: $\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$.

Подчеркнём, что условие $\forall p$ означает отсутствие зависимости N от p: $N \neq N(p)$.

Поскольку успех обучения зависит от умения преподавателя сказать одно и то же по-разному, приведём словесную формулировку критерия Коши: ряд сходится тогда и только тогда, когда сколь угодно «длинная» ($\forall p \in \mathbb{N}$) сумма последовательных слагаемых ряда сколь угодно мала ($< \varepsilon$), если только она состоит из достаточно «далёких» ($\forall n > N$) от начала ряда слагаемых.

Доказательство. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ по определению подразумевает существование предела последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Согласно критерию Коши для последовательности предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > 0$ — такой, что $|S_m - S_n| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon\ \ \forall n > N,\ \ \forall m = n + p > N$. Но

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\right| = \\ = \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Покажем, что *гармонический* ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} + \ldots$$

расходится.

Если для доказательства сходимости ряда надо при любом натуральном p продемонстрировать малость *суммы последовательных слагаемых ряда*, то для опровержения сходимости достаточно указать хотя бы одно значение p, при котором эта сумма не сколь

монархист, Коши в течение 18 лет не мог получить профессуру в Политехнической школе, где он преподавал анализ, за отказ принести присягу на лояльность республиканскому правительству.

угодно мала. Назначим $p = n$ и оценим данную сумму:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n} =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2} > \varepsilon$$

(каждое слагаемое суммы заменено наименьшим, последним слагаемым), что и доказывает расходимость гармонического ряда.

5. Необходимый признак сходимости

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Замечание. Обратное неверно, см., например, гармонический ряд.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ заведомо расходится.

Действительно, допустим противное доказываемому, а именно, предположим, что ряд сходится. Тогда по необходимому признаку $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ должен быть равен нулю, что противоречит условию.

Итак, необходимый признак сходимости невозможно использовать для доказательства сходимости ряда, а критерий Коши слишком сложен и неудобен на практике. Желательны более лёгкие в использовании *признаки сходимости* рядов.

3. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется знакоположительным, если все $u_n \geq 0$.

1. Интегральный признак Коши

Пусть функция $f(x)$: i. *определена для всех* $x \geq 1$; ii. $f(x) \geq 0$ *на области определения*; iii. $f(x)$ *монотонно убывает.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, *составленный из значений* $f(x)$ *при натуральных значениях аргумента, и несобственный* [2] *интеграл* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *ведут себя одинаково — оба сходятся или оба расходятся.*

[2] См. др. часть данного лекционного курса.

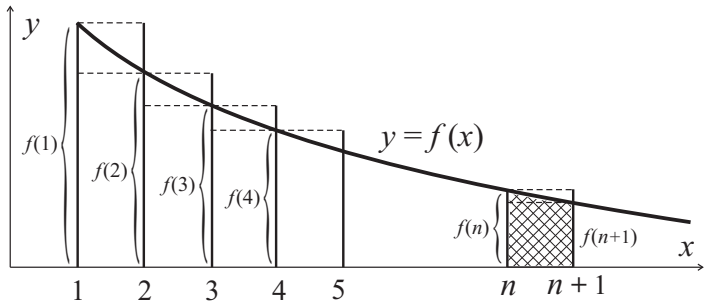

Рис. I.1. К доказательству интегрального признака Коши

Доказательство. Из рис. I.1 видно, что всякое слагаемое ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ численно равно площади прямоугольника с высотой $f(n)$ и длиной основания $1 = (n+1) - n$. Поэтому на отрезке $[n,\, n+1]$ справедливо неравенство

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \le f(n).$$

Почленно складывая эти неравенства при $n = 1,\, 2, \ldots, m$, получим

$$S_{m+1} - f(1) \le \int_1^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le S_m. \tag{1}$$

Отсюда следуют все (четыре) утверждения теоремы:
Σ — сходится $\Rightarrow$ $\int$ — сходится; $\int$ — сходится $\Rightarrow$ Σ — сходится;
Σ — расходится $\Rightarrow$ $\int$ — расходится; $\int$ — расходится $\Rightarrow$ Σ — расходится.

Пусть, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, т.е. существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$ — конечное число, причём $S_m < S$ (почему?). Усилим правую часть (1):

$$\int_1^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le S_m < S, \qquad \forall m.$$

Итак, числовая последовательность $\mathfrak{I}_m = \int_1^{m+1} f(x)\mathrm{d}x$ ограничена. Но она также и возрастающая, поскольку с ростом номера m расширяется область интегрирования для интеграла от неотрицательной $f(x)$, и значение интеграла увеличивается. Из ограниченности и монотонности последовательности следует существование предела [3] $\lim\limits_{m\to\infty} \mathfrak{I}_m = \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, т.е. несобственный интеграл тоже сходится.

Аналогично проверяются остальные утверждения.

[3] Теорема Вейерштрасса о сходимости последовательности.

С л е д с т в и е 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

С л е д с т в и е 2. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и монотонно убывает при $x \geq 1$. Тогда n-й остаток $R_n = f(n+1) + f(n+2) + \ldots$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ оценивается с помощью соотношения

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Справедливость неравенства усматривается непосредственно из рис. I.1.

П р и м е р 1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Ряд удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Интеграл расходится:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_{1}^{\infty} = \infty,$$

а вместе с ним расходится и ряд.

П р и м е р 2. Сколько слагаемых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ надо просуммировать, чтобы найти сумму ряда с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$?

Воспользуемся оценкой остатка из следствия 2:

$$R_n \leq \int_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{n}^{\infty} = \frac{1}{n} < 0{,}01$$

при $n > 100$. Итак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum\limits_{n=1}^{101} \frac{1}{n^2}$ с требуемой точностью ε. Ряд сходится медленно!

З а м е ч а н и е. Интегральный признак обладает многими достоинствами: это и необходимый, и достаточный признак; он очень чувствителен, т.е. распознаёт сходимость/расходимость очень широкого класса рядов. Но у него есть и ограничения. Во-первых, должны удовлетворяться условия выполнимости признака (это обязательно надо проверять). Кроме того, проблема может возникнуть на стадии вычисления интеграла (как известно, не все интегралы берутся в элементарных функциях). Наконец, возможны ситуации, когда даже неясно, как использовать интегральный признак. Примером может служить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (почему?).

2. Признак сравнения

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, *причём* $0 \le u_n \le v_n$. *Тогда*:

1) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится (и имеет сумму* $\mathfrak{S}$*), то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *тем более сходится (обозначим его сумму как* S*), причём* $S \le \mathfrak{S}$.

2) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *тоже расходится.*

Доказательство. Введём частичные суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $\mathfrak{S}_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Очевидно, что $S_n < \mathfrak{S}_n$ как сумма соответственно меньших слагаемых.

1) Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, т.е. существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{S}_n$, то последовательность $\{\mathfrak{S}_n\}$ ограничена: $\mathfrak{S}_n \le M$, где M — некоторое число, единое для всех n. Тогда и подавно $S_n \le \mathfrak{S}_n \le M$ — последовательность $\{S_n\}$ тоже ограничена. Но эта последовательность также и возрастающая, т.к. с ростом n к частичной сумме добавляются положительные слагаемые. Вспомним, что монотонная и ограниченная числовая последовательность сходится [4]. Итак, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ $\left(\text{ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится}\right)$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \le \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{S}_n$, т.е. $S \le \mathfrak{S}$.

2) *От противного*: предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже должен сходиться, что противоречит условию теоремы.

3. Предельный признак сравнения

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, причём все $u_n > 0$, $v_n > 0$, и пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$. Тогда:

1) если $0 \le K < \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится;

2) если $0 < K \le \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже расходится;

3) если $0 < K < \infty$, то ряды ведут себя одинаково (оба сходятся или оба расходятся).

Доказательство. 1) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K < \infty$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ — такой, что $\left|\frac{u_n}{v_n} - K\right| < \varepsilon \quad \forall n > N$. Перейдём к двойному неравенству

$$K - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < K + \varepsilon$$

[4] Опять используем теорему Вейерштрасса о сходимости последовательности.

и преобразуем его правую часть: $u_n < (K+\varepsilon)v_n$. Напомним, что это справедливо для всех $n > N$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ — сходящийся и остаётся таковым после умножения на константу $(K+\varepsilon)$. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ тем более сходится как ряд с меньшими слагаемыми. Сходится и интересующий нас ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, поскольку он отличается от рассмотренного добавлением *конечного* числа (N) слагаемых.

2) *От противного*: предположим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Согласно перевёрнутому отношению $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{K} < \infty$ и первой части доказательства ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ тоже должен сходиться, что противоречит условию теоремы.

3) Множество $0 < K < \infty$ есть пересечение множеств $0 \le K < \infty$ и $0 < K \le \infty$, для которых доказательство уже выполнено, поэтому специальное доказательство излишне.

П р и м е р. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(2n+3)^{13}}{(3n-10)^5\,(5n+8)^{10}}\,.$$

Заметим, что, начиная с $n = 4$, слагаемые ряда $u_n = \frac{(2n+3)^{13}}{(3n-10)^5\,(5n+8)^{10}}$ положительны. Пренебрегая постоянными слагаемыми во всех скобках, придём к более простому выражению $v_n = \frac{(2n)^{13}}{(3n)^5\,(5n)^{10}} = \frac{2^{13}}{3^5\,5^{10}}\,\frac{1}{n^2}$; $K = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Поскольку $0 < K < \infty$, выполнены условия третьей части теоремы. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, следовательно, исходный ряд тоже сходится.

4. Признак Д'Аламбера [5]

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *причём все* $u_n > 0$, *и пусть существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda.$$

[5] Жан Лерон Даламбер (J. Le Rond D'Alembert, 1717-1783), франц. математик и философ. Незаконнорождённый сын знатной дамы, он был подброшен к одной из парижских церквей и вырос в семье стекольщика. Участвовал в издании знаменитой «Энциклопедии», для которой написал много статей. Ценя свободу и независимость, отклонил приглашение Екатерины II приехать в С.-Петербург к наследнику цесаревичу воспитателем с огромным жалованием. В центре внимания для Д'Аламбера всегда были вопросы механики, физики и астрономии, а математические результаты (очень важные), попутно полученные им, — лишь средством для их решения.

Тогда:

1) *если* $\lambda < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится*;

2) *если* $\lambda > 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится*;

3) *если* $\lambda = 1$, *то признак неэффективен (ряд может как сходиться, так и расходиться).*

Доказательство. Начнём с иллюстрации последнего утверждения теоремы. Для обоих рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda = 1$, между тем первый из них (гармонический ряд) расходится, а второй — сходится (следствие 1 интегрального признака — см. С.8).

Докажем первые два утверждения. Запись $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) > 0 \ \ \forall n > N \ \ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda\right| < \varepsilon$, откуда

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть $\lambda < 1$. Выберем столь малое значение ε, чтобы $\lambda + \varepsilon$ оставалось меньше единицы, и обозначим $\lambda + \varepsilon = q$. На основании правой части неравенства (2) $u_{n+1} < (\lambda + \varepsilon)u_n = qu_n$ для $n > N$.

При $n = N + 1$

$$u_{N+2} < qu_{N+1},$$

при $n = N + 2$

$$u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2 u_{N+1},$$

при $n = N + 3$

$$u_{N+4} < qu_{N+3} < q^3 u_{N+1}, \ldots$$

Но ряд

$$qu_{N+1} + q^2 u_{N+1} + q^3 u_{N+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^n u_{N+1} = u_{N+1} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

сходится (это — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, т.к. $q < 1$). По признаку сравнения ряд

$$u_{N+2} + u_{N+3} + u_{N+4} + \ldots = \sum_{n=N+2}^{\infty} u_n$$

сходится, т.к. каждое его слагаемое меньше соответствующего слагаемого бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Окончательно,

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, ибо отличается от рассмотренного конечным числом слагаемых. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\lambda > 1$. Выберем столь малое значение ε, чтобы $\lambda - \varepsilon$ оставалось больше единицы, и обозначим $\lambda - \varepsilon = \kappa$. На основании левой части неравенства (2) имеем $u_{n+1} > (\lambda - \varepsilon)u_n = \kappa u_n > u_n$ для $n > N$. Итак, слагаемые ряда $\Sigma\, u_n$ возрастают, начиная с номера $n = N + 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, и ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$, а вместе с ним и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится по необходимому признаку сходимости, что и требовалось доказать во второй части теоремы.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 = \lambda < 1$; по признаку Д'Аламбера ряд сходится [6].

5. Радикальный [7] признак Коши

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *причём все* $u_n > 0$, *и пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$. *Тогда*:

1) *если* $\lambda < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится*;

2) *если* $\lambda > 1$, *то ряд расходится*;

3) *если* $\lambda = 1$, *то признак неэффективен (ряд может как сходиться, так и расходиться).*

Доказательство. Запись $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$ означает, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) > 0 \quad \forall n > N \quad \left|\sqrt[n]{u_n} - \lambda\right| < \varepsilon$, откуда $\lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \lambda + \varepsilon$.

1) Пусть $\lambda < 1$. Для достаточно малого ε сумма $\lambda + \varepsilon = q$ останется меньше 1. Тогда, согласно правой части двойного неравенства, $u_n < q^n$, где $q < 1$. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, а вместе с ней, по признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) Пусть теперь $\lambda > 1$. Для достаточно малого ε сумма $\lambda - \varepsilon = \kappa$ останется больше 1. Тогда, согласно левой части двойного неравенства, $u_n > \kappa^n$, где $\kappa > 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится по необходимому признаку, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

---

[6] Попутно, согласно необходимому признаку сходимости, мы получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

[7] Здесь это слово лишено политического оттенка экстремизма, а означает всего лишь наличие радикала — знака извлечения корня.

3) Примеры, иллюстрирующие случай $\lambda = 1$, предлагается подобрать самостоятельно.

П р и м е р. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n^2-5}{7n^2+4}\right)^n$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-5}{7n^2+4} = \frac{3}{7} = \lambda < 1$, ряд сходится.

З а м е ч а н и е. Признак Д'Аламбера и радикальный признак Коши удобны в использовании, но мало чувствительны, т.к. основаны на сравнении с геометрической прогрессией, которая слишком быстро возрастает (убывает). Оба признака, например, неэффективны для столь различных рядов как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Радикальный признак Коши несколько чувствительнее. Рассмотрим для примера ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots$$

Здесь $u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n}, & n-\text{чётное}, \\ \frac{1}{2^n}, & n-\text{нечётное}. \end{cases}$ Тогда $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n, & n-\text{чётное}, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, & n-\text{нечётное}, \end{cases}$ т.е. отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ постоянно перескакивает через единицу, и признак Д'Аламбера неприменим. По радикальному признаку Коши $\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1, & n-\text{чётное}, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1, & n-\text{нечётное}, \end{cases}$ и оба значения указывают на с х о д и м о с т ь ряда.

4. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимся называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$$

где все $a_n > 0$ или < 0.

Для исследования сходимости знакочередующихся рядов используется

Признак Лейбница [8]

Пусть для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n > 0$, *выполняются условия*:

1) слагаемые ряда убывают по модулю: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$,

[8] Готфрид Вильгельм Лейбниц (G.W. Leibniz, 1646-1716), нем. философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк и языковед. Независимо от Ньютона (позднее его) создал дифференциальное и интегральное исчисление; первым опубликовал своё открытие, что породило длительный спор о приоритете.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд сходится.

Доказательство. Составим частичную сумму ряда с чётным числом слагаемых, попутно группируя слагаемые:

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{>0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{>0} - \underbrace{a_{2n}}_{>0}.$$

Поскольку из a_1 вычитаются положительные числа, очевидно, что $S_{2n} < a_1$, т.е. последовательность $2n$-частичных сумм ограничена сверху. При этом последовательность возрастает:

$$S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{>0} \;\Rightarrow\; S_{2n+2} > S_{2n}.$$

Из монотонности и ограниченности последовательности S_{2n} по теореме Вейерштрасса о сходимости последовательности следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, но пока это доказано только для чётного числа слагаемых. Если частичная сумма содержит нечётное число слагаемых, то

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{2n}}_{=S} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}}_{=0} = S.$$

Итак, обе подпоследовательности стремятся к единому пределу, что и доказывает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

Следствие 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ (все $a_n > 0$) имеет сумму S, то $0 \le S \le a_1$.

Действительно, уже показано, что $S_{2n} < a_1$. Сгруппируем слагаемые в частичной сумме по-другому:

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + \ldots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{>0} > 0.$$

Итак, $0 < S_{2n} < a_1$, откуда, переходя к пределу $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, получаем доказываемое неравенство (в пределе строгое неравенство может стать нестрогим).

Следствие 2. Остаток сходящегося знакочередующегося ряда не превосходит по модулю своего первого слагаемого.

Запишем подробно знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \underbrace{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n}_{S_n} +$$
$$+ \underbrace{(-1)^{n+2}a_{n+1} + (-1)^{n+3}a_{n+2} + (-1)^{n+4}a_{n+3} + \ldots}_{R_n}$$

Оценим остаток ряда:

$$\left|R_n\right| = \left|(-1)^{n+2}(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots)\right| = \left|a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots\right| \le a_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ и найти его сумму S с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Для данного знакочередующегося ряда выполнены условия применимости признака Лейбница: $1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^3} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0$; следовательно, ряд сходится.

Запишем первые слагаемые ряда, следя за тем, когда очередное слагаемое станет меньше ε:

$$S = \underbrace{\begin{matrix} 1 & - & \frac{1}{2^3} & + & \frac{1}{3^3} & - & \frac{1}{4^3} \\ 1 & - & 0{,}1250 & + & 0{,}0370 & - & 0{,}0156 \end{matrix}}_{S_4} + \underbrace{\begin{matrix} \overbrace{\frac{1}{5^3}}^{<\varepsilon} & - & \ldots \\ 0{,}0080 & - & \ldots \end{matrix}}_{R_4}$$

Видим, что пятое слагаемое $\frac{1}{5^3} = 0{,}0080 < \varepsilon$, а остаток R_4 будет тем менее. Поэтому

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \approx S_4 = \sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = 1 - 0{,}1250 + 0{,}0370 - 0{,}0156 \approx 0{,}896$$

с точностью 0,008 (даже несколько лучше требуемой точности).

5. Знакопеременные ряды

Знакопеременным называется ряд, слагаемые которого имеют, вообще говоря, разные знаки, но их чередование не подчиняется столь простой зависимости, как в знакочередующемся ряду.

Будем рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где u_n — числа действительные произвольного знака или комплексные.

Теорема о сходимости ряда из модулей

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, *составленный из модулей, сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *тоже сходится.*

Доказательство. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ означает по критерию Коши, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ — такой, что $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$:

$$\big||u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|\big|=|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon.$$

Но, поскольку модуль суммы не превышает суммы модулей, к этому неравенству можно слева приписать ещё одну часть:

$$\big|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}\big|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon.$$

Итак, $\forall n>N(\varepsilon)$, $\forall p\in\mathbb{N}$ имеем

$$\big|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}\big|<\varepsilon.$$

Это — не что иное, как запись критерия Коши для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Ряд сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если не только сам он, но и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^3}\sin\frac{\pi n}{5}$.

В силу ограниченности синуса $|u_n|\le\frac{1}{n^3}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ тем более сходится по признаку сравнения, а исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Легко видеть, что данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница. Однако взятый по модулю ряд становится гармоническим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и расходится. Поэтому исходный ряд сходится лишь условно.

При исследовании знакопеременных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ на абсолютную сходимость можно пользоваться всеми признаками сходимости для знакоположительных рядов. В частности, ряд сходится абсолютно, если существует и меньше единицы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$ (признак Д'Аламбера и радикальный признак Коши соответственно).

З а м е ч а н и е. Исследование сходимости знакочередующихся рядов рекомендуется начинать с исследования их абсолютной сходимости, т.к. это часто быстрее приводит к цели, чем применение признака Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости.

Теорема о сходимости комплекснозначных рядов

Пусть из комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$ образован ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Справедливы утверждения:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся по отдельности ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ частичная сумма

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 + \ldots + x_n + iy_n =$$
$$= \underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}_{S_n^{\mathsf{Re}}} + i\,\underbrace{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}_{S_n^{\mathsf{Im}}} = S_n^{\mathsf{Re}} + iS_n^{\mathsf{Im}}.$$

Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, т.е. для существования конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, необходимо и достаточно, чтобы так же вели себя и частичные суммы из действительных и мнимых величин: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\mathsf{Re}}$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\mathsf{Im}}$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\mathsf{Re}} + i\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\mathsf{Im}}$.

2) а. Пусть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Поскольку $|x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$, $|y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$, по признаку сравнения сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$, т.е. ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся а б с о л ю т н о.

б. Пусть теперь сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n|$. Поскольку

$$|z_n| = |x_n + iy_n| \le |x_n| + |iy_n| = |x_n| + |y_n|$$

и сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(|x_n|+|y_n|\big)$ двух сходящихся рядов сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ сходится по признаку сравнения.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{5n+2} + i\,\frac{\ln n}{n}\right]$.

Ряд из действительных частей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+2}$ — знакочередующийся и сходится по признаку Лейбница. Ряд из мнимых частей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ расходится, т.к. $\frac{\ln n}{n} \ge \frac{\ln 2}{n}$ для $n \ge 2$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармонический и расходится.

Итого, весь комплекснозначный ряд расходится.

6. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

1. Сходящийся знакопеременный ряд (в т.ч. и знакопостоянный) остаётся сходящимся и не меняет суммы при любой группировке его слагаемых, производимой без изменения порядка их следования.

2. Если ряд сходится абсолютно, то любая перестановка его слагаемых не меняет сходимость и сумму ряда.

3. Если ряд сходится условно, то при подходящей перестановке его слагаемых можно получить сходящийся ряд с любой наперёд заданной суммой и даже расходящийся ряд.

4. Если знакопеременный ряд абсолютно сходится, то сходятся ряды, составленные из: i) положительных слагаемых, ii) отрицательных слагаемых. Если же знакопеременный ряд сходится условно, то эти ряды расходятся.

Отсюда следует, что абсолютно сходящиеся ряды сходятся за счёт того, что их слагаемые u_n быстро стремятся к нулю при $n \to \infty$, а условно сходящиеся ряды сходятся благодаря частичной компенсации слагаемых разных знаков.

Пример. Проиллюстрируем свойство 3 на примере условно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Запишем несколько первых слагаемых ряда:

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \dots$$

Переставим слагаемые:

$$\underbrace{1-\tfrac{1}{2}}-\tfrac{1}{4}+\underbrace{\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}}-\tfrac{1}{8}+\underbrace{\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{10}}-\tfrac{1}{12}+\ldots$$

(как видно, ни одно слагаемое не будет упущено, но порядок их следования изменён). Наконец, вычтем слагаемые, указанные скобками:

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}+\ldots=\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\ldots\right)=\tfrac{1}{2}\,S.$$

Итак, «всего лишь» перестановкой слагаемых ряда мы уполовинили его сумму!

7. Функциональные ряды

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

Итак, теперь каждое слагаемое — не число, а функция.

Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, составленный из значений $u_n(x)$ в точке x_0, сходится к числу $S(x_0)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется *сходящимся* в этой точке, а сама точка x_0 есть *точка сходимости* функционального ряда.

$S(x_0)$ — *сумма ряда* в точке x_0.

Множество точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости.*

П р и м е р 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Поскольку $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный ряд сходится (притом, абсолютно) при любом x. Область сходимости — вся числовая ось $(-\infty;\ \infty)$.

П р и м е р 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$.

Ряд знакоположительный; применим к нему радикальный признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n^2x}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-nx}=\begin{cases}0 & ;\ x>0,\\ 1 & ;\ x=0,\\ \infty & ;\ x<0.\end{cases}$ При $x=0$ $u_n(x)=1$, и по необходимому признаку ряд расходится. Область сходимости ряда: $(0;+\infty)$.

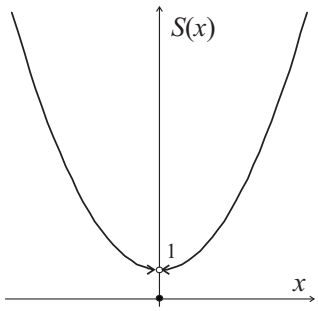

Рис. I.2. В нуле сумма ряда разрывна, хотя каждое его слагаемое непрерывно!

Свойства суммы функционального ряда

Пусть функции $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ — непрерывны. Вполне естественно, что n-я частичная сумма $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ тоже является функцией непрерывной. Если слагаемые дифференцируемы, тем же свойством обладает и n-я частичная сумма:

$$S_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x).$$

Но сумма «всех» (бесконечного числа) слагаемых ряда этими свойствами может не обладать!

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots$ Он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$, и, поскольку $0 < q < 1$ при $x \neq 0$, прогрессия — бесконечно убывающая. Тогда её сумма

$$S(x) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Если же $x = 0$, то находим сумму $S(0)$ прямой подстановкой нуля в исходную формулу для ряда; все слагаемые и с ними сумма обращаются в нуль. Итого, $S(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , \ x \neq 0, \\ 0 & , \ x = 0. \end{cases}$

Сумма ряда оказалась разрывной в нуле (см. рис. I.2), при том, что каждое слагаемое $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ непрерывно всюду! Математики XIX века затратили много усилий на выяснение причин такого парадоксального поведения.

8. Равномерная сходимость функциональных рядов

Разгадка парадокса — в характере сходимости функционального ряда, которая бывает *равномерной* и *неравномерной*. Рассмотрим это понятие

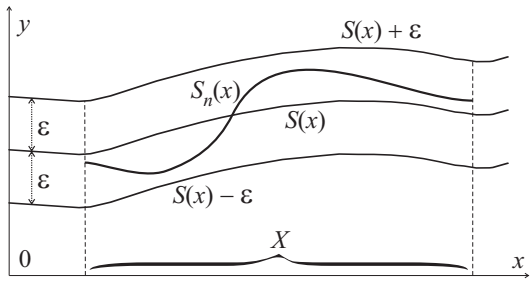

Рис. I.3. К определению равномерной сходимости

сначала на примере последовательности и сопоставим «просто» сходимость и равномерную сходимость.

Сходимость последовательности

Последовательность функций $f_n(x)$ *сходится* к предельной функции $f(x)$ $\left(f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)\right)$ при фиксированном x и $n \to \infty$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x)$ — такой, что $\forall n > N\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для этого фиксированного x.

Равномерная сходимость последовательности

Последовательность функций $f_n(x)$ *равномерно сходится* к предельной функции $f(x)$ $\left(f_n(x) \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)\right)$ на множестве X при $n \to \infty$, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ — такой, что $\forall n > N\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ сразу $\forall x \in X$.

А теперь перейдём к рядам:

Равномерная сходимость функционального ряда

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$ на этом множестве.

В свою очередь, $S_n(x) \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall x \in X\ \forall n > N$: $|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon$.

На рис. I.3 представлена геометрическая иллюстрация понятия равномерной сходимости.

Пример. Вернёмся к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ и покажем, что он сходится равномерно на множестве $|x| \geq a > 0$ и неравномерно — на всей числовой оси.

Ранее мы уже нашли, что сумма ряда

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , \ x \neq 0, \\ 0 & , \ x = 0. \end{cases}$$

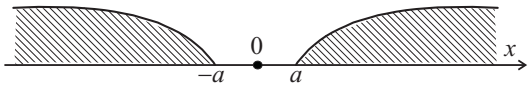

Рис. I.4. В симметричной области, не включающей нуль, сходимость равномерна

Вычислим теперь его n-ю частичную сумму

$$S_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}\,.$$

По известной формуле суммы первых n слагаемых геометрической прогрессии $b + bq + \ldots + bq^{n-1} = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$ получаем

$$S_n(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}\right)}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,.$$

Рассмотрим множество $|x| \geq a > 0$, т.е. $x \in (-\infty;\, -a] \cup [a;\, +\infty)$. На этом множестве

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{(1+a^2)^{n-1}} < \varepsilon$$

для $n > N(\varepsilon) = \left[1 + \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1+a^2)}\right]$ [9] и сразу для всех $x \in (-\infty;\, -a] \cup$ $\cup [a;\, +\infty) = X$. Это определение равномерной сходимости. Она имеет место в случае, когда x принимает значения, отличающиеся от нуля пусть на сколь угодно малое, но фиксированное значение a (рис. I.4).

Пусть теперь $x \to 0$, что возможно, когда вырез вокруг нуля «схлопывается». При этом $|R_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \to 1$ (при любом n) и, следовательно, остаток не может быть меньше произвольно малого $\varepsilon > 0$ для всех x одновременно. Значит, в окрестности нуля равномерность сходимости нарушается, и на всей числовой оси ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится уже неравномерно.

Свойства равномерно сходящихся рядов

1. Если функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;\, b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на этом отрезке, то сумма ряда $S(x)$ является непрерывной функцией на $[a;\, b]$.

2. Если функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;\, b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно

[9] Квадратными скобками принято обозначать целую часть числа, например, $\Big[3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620 90\Big] = 3$.

сходится к $S(x)$ на этом отрезке, то ряд можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Пусть функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы [10] на $[a;\,b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ $\forall x \in [a;\,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a;\,b]$. Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывно дифференцируема и ряд можно почленно дифференцировать:

$$S'(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Итак, мы знаем, что два типа сходимости — абсолютная и равномерная — обеспечивают ряду многочисленные положительные качества. Ещё заманчивее было бы их сочетание, но, к сожалению, *из равномерной сходимости не следует абсолютная и наоборот.*

Пример. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ сходится равномерно на всей числовой оси, но не абсолютно.

Поскольку ряд знакочередующийся, остаток легко оценивается:

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \tfrac{1}{x^2+n+1} \le \tfrac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

что выполнено при условии $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ и $\forall x \in (-\infty;\,+\infty)$. Итак, $S_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} S(x)$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ сходится равномерно.

Но абсолютно он не сходится. Действительно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n}$; обозначим $\frac{1}{x^2+n} = u_n$ и введём ряд для сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, где $v_n = \frac{1}{n}$. Мы видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ при любом фиксированном x, а поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится (гармонический!), то по предельному признаку сравнения расходится и ряд из модулей.

[10] Это означает, что функция $u_n(x)$ дифференцируема и её производная $u_n'(x)$ непрерывна.

9. Признаки равномерной сходимости

Как видно из предыдущего, доказательство равномерной сходимости по определению не всегда легко. Рассмотрим два признака равномерной сходимости, иногда облегчающие задачу.

Признак Вейерштрасса [11]

Пусть для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *удаётся найти такой числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(называемый мажорирующим рядом или мажорантой* [12]*), что* $|u_n(x)| \le a_n$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, *причём мажоранта сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X.

Доказательство. Согласно критерию Коши сходимость мажорирующего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$ (знак модуля в действительности не нужен, т.к. мажоранта по смыслу определения неотрицательна).

Дополним слева последнее неравенство:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \overset{\substack{\text{по}\\ \text{свойству}\\ \text{модуля}}}{\le}$$

$$\le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| \overset{\substack{\text{по}\\ \text{определению}\\ \text{мажоранты}}}{\le}$$

$$\le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

причём справедливо это $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$. Итак,

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

---

[11] Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (K. Weierstraß, 1815-1897), самый значительный после Гаусса и Римана нем. математик XIX в. По настоянию отца изучал право и экономику, но учёбу бросил; став школьным учителем, преподавал математику, ботанику, географию, историю, немецкий язык, гимнастику и чистописание. Годы «бесконечной скуки и усталости», когда он не имел доступа к математической литературе и учёным кругам, завершились с опубликованием в 1854 г. статьи об абелевых интегралах (см. С. 25), сразу замеченной математиками.

[12] От франц. *majeur* — больший.

$\forall n > N,\ \forall p,\ \forall x \in X$, где последовательную сумму p слагаемых мы выразили как разность двух частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Поскольку неравенство верно для любого p, можно перейти к пределу $p \to \infty$:

$$\lim_{p\to\infty} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \ \Rightarrow\ |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon\ \forall n > N,\ \forall x \in X$$

(мы учли, что при $p \to \infty$ частичная сумма ряда превращается в «полную» сумму ряда $S(x)$). Последнее неравенство означает по определению, что $S_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(x)$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X, что и требовалось доказать.

Пример. Показать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n^2}$.

Поскольку, в силу ограниченности синуса, на всей числовой оси справедлива оценка $\left|\frac{\sin \pi n x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, и числовая мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный функциональный ряд по признаку Вейерштрасса сходится равномерно $\forall x \in \mathbb{R}$.

Примечание. Признак Вейерштрасса — достаточный, но не необходимый, поэтому, если для некоторого функционального ряда не удаётся отыскать сходящуюся числовую мажоранту, делать отсюда вывод о неравномерной сходимости неверно.

В некоторых [13] случаях полезным оказывается

Признак Абеля [14]

Пусть функциональный ряд имеет специальный вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$.

Если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится на* X,

2) функции $b_n(x)$ *ограничены по* x, n, *т.е.* $|b_n(x)| \le M\ \ \forall n,\ \forall x \in X$, *и, кроме того*

[13] увы, нечастых :–(

[14] Нильс Хенрик Абель (N.H. Abel, 1802-1829), норвежский математик. Исключительные математические способности начал проявлять с 16 лет. Между тем умер (от алкоголизма) его отец-священник, и на Абеля легла забота о младших брате и сестре. Всю оставшуюся жизнь тяжко боролся с туберкулёзом и нуждой, пытаясь получить место, которое доставило бы ему средства для женитьбы на его невесте. Не успев узнать о своём назначении профессором в Берлине, Абель умер. Его работы оказали большое влияние на развитие всей математики. В 2002 г. в Норвегии учреждена математическая премия памяти Абеля.

3) функции $b_n(x)$ монотонны по n при каждом фиксированном x, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ сходится равномерно на X.

П р и м е р. Показать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$ на отрезке $[0;\, 1]$.

Пусть $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$, $b_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$ сходится равномерно в интервале $0 \le x < \infty$. Действительно, поскольку ряд знакочередующийся, остаток не превзойдёт по модулю своего первого слагаемого:

$$|R_n(x)| \le \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right] \quad \forall x \in [0;\, +\infty)$.

Известно, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ для любого фиксированного положительного x монотонно возрастает при $n \to \infty$ и имеет пределом число e^x. Поэтому функции $b_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ограничены на отрезке $[0;\, 1]$ числом e и при каждом $x \in [0;\, 1]$ образуют монотонную (возрастающую) последовательность.

Итак, все условия признака Абеля выполнены, поэтому исходный ряд р а в н о м е р н о с х о д и т с я на отрезке $[0;\, 1]$.

10. Степенны́е ряды

Степенны́м называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

Здесь x, x_0 и коэффициенты a_n — вообще говоря, к о м п л е к с н ы е числа. Заменой $(x-x_0) = z$ можно привести ряд к более простому виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Теорема Абеля

Для степенно́го ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ справедливо:

1) если ряд сходится в точке $z_1 \ne 0$, то он а б с о л ю т н о с х о д и т с я при всех z таких, что $|z| < |z_1|$;

2) если ряд расходится в точке z_2, то он р а с х о д и т с я при всех z таких, что $|z| > |z_2|$.

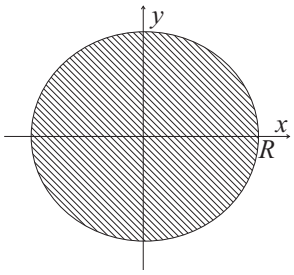

Рис. I.5. Круг сходимости комплексного степенно́го ряда

Доказательство. 1) Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ сходится, по необходимому признаку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_1^n = 0$, следовательно, последовательность $\{a_n z_1^n\}$ ограничена: $|a_n z_1^n| \le M$. Рассмотрим аргумент z такой, что $|z| < |z_1|$. Оценим n-е слагаемое ряда:

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \le M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ сходится (это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, для которой $|q| = |z/z_1| < 1$). Тогда по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно.

2) *От противного*: предположим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z| > |z_2|$. Но тогда, по первой части теоремы, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ также сходится. Это противоречит условию теоремы.

Следствие 1. Для комплекснозначного степенно́го ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ существует число R $(0 \le R \le \infty)$, называемое *радиусом сходимости* ряда — такое, что в *круге сходимости* $|z| < R$ ряд абсолютно сходится, вне круга сходимости — расходится, а на границе круга может как сходиться, так и расходиться (рис. I.5).

Следствие 2. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ с действительными a_n, x область сходимости представляет собой не круг, а интервал $(-R;\, R)$, внутри которого ряд абсолютно сходится, за его пределами — расходится, а в граничных точках $x = \pm R$ может вести себя по-разному [15].

[15] Для действительного ряда исследование поведения на границе настолько проще, чем для комплексного, что именно для действительных рядов мы только и будем его проводить.

С л е д с т в и е 3. Для ряда общего вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ круг сходимости имеет своим центром точку z_0: $|z-z_0|<R$.

П р и м е р 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

В зависимости от знака x ряд может быть знакоположительным или знакочередующимся. Исследуем ряд сначала на а б с о л ю т н у ю сходимость; по признаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty}|x|\,\frac{n}{n+1} = |x|,$$

т.е. при $|x|<1$ ряд (абсолютно) сходится, при $|x|>1$ — расходится, а при $|x|=1$ требуется добавочное исследование.

Проверим граничные точки интервала сходимости. Подставляя $x=1$ в исходный ряд, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — расходящийся (гармонический) ряд. При $x=-1$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, сходящийся по признаку Лейбница.

Итак, ряд сходится в области $[-1;\,1)$.

П р и м е р 2. Найти область сходимости комплекснозначного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i-1}{1-2i}\right)^n$.

Рассуждая так же, как в предыдущем примере, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{z+i-1}{1-2i}\right| = \frac{|z+i-1|}{\sqrt{5}} < 1.$$

Итак, круг сходимости $|z-(1-i)|<\sqrt{5}$ имеет центр $(1,\,-1)$ и радиус $R=\sqrt{5}$.

С в о й с т в а с т е п е н н ы х р я д о в

Будем считать a_n и x в выражении $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ действительными числами.

1. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ р а в н о м е р н о с х о д и т с я на любом отрезке, лежащем в н у т р и интервала сходимости ряда.

С л е д с т в и е 1. Сумма степенного ряда является н е п р е р ы в н о й функцией внутри его интервала сходимости.

С л е д с т в и е 2. Степенной ряд можно п о ч л е н н о и н т е г р и р о в а т ь, если пределы интегрирования лежат внутри его интервала сходимости, и проинтегрированный ряд будет равномерно сходиться в той же

области.

2. Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри его интервала сходимости, и продифференцированный ряд будет иметь тот же интервал сходимости, что и исходный, за исключением, может быть, граничных точек.

Употребительными способами нахождения суммы ряда, не являющегося геометрической прогрессией, являются почленное дифференцирование и почленное интегрирование (возможно, неоднократное). Иногда при этом получается геометрическая прогрессия.

Пример. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

На С. 28 мы нашли область сходимости этого ряда: $[-1;\, 1)$. Поскольку ряд — степенной, интервал $(-1;\, 1)$ есть область равномерной сходимости, и на нём сумма ряда $S(x)$ есть функция непрерывная.

Очевидно, что функцию

$$S(x) = x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \ldots + \tfrac{x^n}{n} + \ldots$$

выгодно продифференцировать:

$$S'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

При $x \in (-1;\, 1)$ это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, и мы легко находим её сумму: $S'(x) = \frac{1}{1-x}$. Тогда сумма исходного ряда $S(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\ln|1-x| + C$. Очевидно, что $S(0) = 0$, т.к. при $x = 0$ все слагаемые ряда обращаются в нуль. Из этого начального условия получаем $C = 0$.

Итак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|$ для $x \in (-1;\, 1)$.

Напомним, что на левой границе области сходимости, в точке $x = -1$, этот ряд тоже сходится (хотя и условно). Чему же равна там его сумма? Проблема заключается в том, что в этой точке метод (почленного дифференцирования), которым получена сумма $-\ln|1-x|$, уже неприменим, поскольку при $x = -1$ геометрическая прогрессия для $S'(x)$ расходится.

В такой ситуации используется

Вторая [16] теорема Абеля

Если вещественный степенной ряд $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ *имеет радиус сходимости* R, *причём сходится (не обязательно абсолютно) и при* $x = R$, *то сумма ряда непрерывна* с л е в а *в точке* $x = R$, *т.е.* $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. *Симметричное утверждение справедливо в случае сходимости ряда при* $x = -R$.

На этой теореме основан

Метод суммирования Пуассона-Абеля

Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится на интервале* $(0;\, 1)$, *а его сумма равна* $f(x)$. *Если существует* $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = A$, *то говорят, что числовой ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ с у м м и р у е м м е т о д о м П у а с с о н а - А б е л я, *а число* A *называют* о б о б щ ё н н о й *(в смысле Пуассона-Абеля* [17]*) суммой этого числового ряда.*

Итак, $S(-1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{x \to -1} S(x) = \lim\limits_{x \to -1} \big(-\ln|1-x|\big) = -\ln 2.$

Отсюда следует, что $\ln 2 = S(-1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$
Для вычисления $\ln 2$ этот ряд непригоден, т.к. сходится слишком медленно.

11. Разложение функций в степенные ряды

В курсе математического анализа уже изучалась ф о р м у л а Т е й л о р а.

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots. \quad (3)$$

При $x_0 = 0$ получается ряд *Маклорена*. Запись (3) пока формальна, поскольку

1) ряд может оказаться расходящимся;

2) ряд может сходиться, но не к той функции $f(x)$, для которой он получен.

«Благоприятный» случай:

3) ряд сходится к само́й функции $f(x)$.

---

[16] Вторая — в отличие от теоремы на С. 26

[17] Существуют и другие методы суммирования — см. [**7**].

Если ряд Тейлора для функции $f(x)$ сходится к ней, то говорят, что функция *разложима в ряд Тейлора.*

П р и м е р (Лапласа [18]), иллюстрирующий случай 2.
Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \quad x \neq 0; \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

в ряд Маклорена.

Для этого вычислим $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0), \ldots$

По определению функции $f(0) = 0$.

Производная $f'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-1/x^2}$, но подстановка в эту формулу $x = 0$ для нахождения $f'(0)$ была бы грубой ошибкой (почему?). Придётся воспользоваться определением производной:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Получилась неопределённость. Сделаем замену $\frac{1}{\Delta x} = y$ и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{y \to \infty} \frac{e^{-y^2}}{1/y} = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2y\, e^{y^2}} = 0.$$

Итак, $f'(0) = 0$.

Аналогично

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(\Delta x)^3}\, e^{-1/(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

В с е производные в нуле обращаются в нуль!

Естественно, что ряд Маклорена $0 + 0x + 0x^2 + \ldots$ имеет сумму $S(x) = 0$, т.е. н е с х о д и т с я к раскладываемой функции $f(x)$.

[18] Пьер Симон Лаплас (P.S. Laplace, 1749-1827), франц. астроном, математик и физик. Крестьянский сын; учился в монастырской школе, откуда вышел убеждённым атеистом. Известен его ответ Наполеону на упрёк, что в его «Трактате о небесной механике» нет упоминания о Боге: "Государь, я не нуждался в этой гипотезе!" Вклад Лапласа в естествознание и математику столь велик, что одно только перечисление его важнейших результатов заняло бы полстраницы.

Необходимое и достаточное условие разложимости в ряд Тейлора

Запишем подробно ф о р м у л у Тейлора:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) =$$
$$= \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{S_n(x)} + R_n(x), \quad (4)$$

где $R_n(x)$ — *остаточный член* формулы Тейлора, записываемый, например, в форме Лагранжа так: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$, где точка c находится между x_0 и x.

Предположим, что в окрестности точки x_0 $R_n(x)$ стремится к нулю с ростом n: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Переходя в (4) к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots,$$

т.е. справа от знака равенства получается уже р я д Т е й л о р а и он с х о д и т с я к раскладываемой функции $f(x)$. Наоборот, если $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то, как легко видеть, и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Итак, получаем следующее н е о б х о д и м о е и д о с т а т о ч н о е условие разложимости в ряд Тейлора:

функция разложима в ряд Тейлора тогда и только тогда, когда остаточный член её формулы Тейлора стремится к нулю при $n \to \infty$.

Достаточный признак разложимости в ряд Тейлора

Если все производные функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 ограничены по модулю одним и тем же числом M, то функция в этой окрестности разложима в ряд Тейлора.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $|f^{(n)}(c)| \le M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где точка c принадлежит окрестности x_0, поэтому для остаточного члена в форме Лагранжа получаем оценку: $|R_n(x)| \le M\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$.

Составим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$. Он сходится по признаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \left|\frac{n!}{(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-x_0}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Отсюда по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, поэтому тем более $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, и, по необходимому и достаточному условию, функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

12. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций

1. Синус

Как известно, для $f(x) = \sin x$ производная произвольного порядка выражается как $f^{(n)}(x) = \sin\bigl(x + \frac{\pi}{2}n\bigr)$; очевидна её ограниченность: $\bigl|f^{(n)}(x)\bigr| \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ и, по достаточному признаку, синус разложим в ряд Тейлора на всей числовой оси. На основании известной формулы Тейлора запишем ряд Тейлора (в данном случае, Маклорена):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

2. Косинус

Вспомним, что $\cos x = (\sin x)'$ и продифференцируем почленно ряд Маклорена для синуса [19]:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

3. Экспонента

Для $f(x) = e^x$ производная любого порядка $f^{(n)}(x) = e^x$, и на всяком конечном отрезке $x \in [-h;\, h]$ $\bigl|f^{(n)}(x)\bigr| \le e^h$. При фиксированном (хотя бы и сколь угодно большом) h это число постоянно, поэтому, по достаточному признаку, на всей числовой оси экспонента разложима в ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Следствие формул 1 – 3. Запишем формально ряд Маклорена для экспоненты с мнимым показателем:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \ldots \overset{\substack{\text{выделяем}\\ \text{действительную}\\ \text{и мнимую части}}}{=}$$

$$= \bigl(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\bigr) + i\bigl(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\bigr).$$

[19] Продумайте обоснование законности этой процедуры.

В первых скобках образовался ряд для косинуса, во вторых — для синуса. Получили знаменитую *формулу Эйлера*, связывающую экспоненту, синус и косинус:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

4. Логарифм

Получим ряд Маклорена для $f(x) = \ln(1+x)$. Проще всего поступить следующим образом. Производную $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

со знаменателем $q = -x$, причём $|q| < 1$. Чтобы получить ряд для само́й функции, надо почленно проинтегрировать данный [20]:

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \tfrac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int \big(1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\big)\mathrm{d}x.$$

Итак, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad \big(\forall x \in (-1;\, 1)\big).$

При $x = 1$ этот ряд тоже сходится к рассматриваемой функции (см. С. 30), поэтому окончательно область сходимости: $x \in (-1;\, 1]$.

5. Бином Ньютона

Для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ разложение по степеням x при натуральных значениях показателя степени α содержит конечное число слагаемых и при небольших α изучается даже в школе [21]. Ньютону принадлежит заслуга обобщения этой формулы на случай дробного и отрицательного показателей степени, при которых разложение по степеням x становится суммой бесконечного числа слагаемых, т.е. рядом (который мы запишем, полагая известной соответствующую формулу Тейлора):

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Ряд сходится при $x \in (-1;\, 1)$. Кроме того, при положительных значениях α граничные точки тоже принадлежат этому интервалу.

---

[20] Обоснуйте законность операции и отсутствие постоянной интегрирования!

[21] $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$, $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$.

6. Арктангенс

Как и в случае логарифма, производная функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ проще исходной функции: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, и при $|x| < 1$ её можно трактовать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\tfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots.$$

После почленного интегрирования [22]:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad \big(\forall x \in [-1;\, 1]\big).$$

7. Арксинус

Идея та же: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \big(1 + (-x^2)\big)^{-1/2}$, и далее по формуле бинома Ньютона:

$$\big(1 + (-x^2)\big)^{-1/2} = 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-x^2\right) + \tfrac{1}{2!}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2} - 1\right)\left(-x^2\right)^2 + \ldots =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{3}{8}\,x^4 + \ldots.$$

Почленно интегрируем [23]:

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots \qquad \big(\forall x \in (-1;\, 1)\big).$$

Примечание. Настоятельно рекомендуется не просто уметь вывести эти формулы, а помнить их. Это же относится к гиперболическим синусу и косинусу, ряды для которых элементарно получаются из ряда для e^x:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

13. Применение рядов Тейлора

Вычисление значений функций. Как известно, для этой цели используется и формула Тейлора. Но преимуществом ряда Тейлора является то, что остаток ряда $R_n(x)$ оценить проще, чем остаточный член формулы Тейлора, и для этого есть более разнообразные приёмы.

[22] См. сноску для логарифма!

[23] Формула для u_n сложна, не будем ею заниматься.

Перечислим эти приёмы.

1. Для знакочередующегося ряда $|R_n(x)| \le |u_{n+1}(x)|$. Пример такой оценки уже рассматривался на С. 15.

2. Если ряд не является знакочередующимся, то остаток оценивают с помощью мажорирующей бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

3. Иногда для знакоположительных рядов удобна оценка $R_n \le \int\limits_n^\infty f(x)\mathrm{d}x$ (см. С. 8).

Пример. Вычислить $\ln 2$ с точностью 10^{-5}.

Подставляя значение $x = 1$ в ряд

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

получим

$$\ln 2 = \underbrace{1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}}_{S_n} + \underbrace{(-1)^n \tfrac{1}{n+1} + \ldots}_{R_n}$$

Ряд знакочередующийся, поэтому $|R_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1} < 10^{-5}$. Неравенство выполняется, если $n+1 > 100\,000$ или $n > 99\,999$. Таким образом, хотя ряд и сходится, скорость сходимости столь мала, что практически для вычислений он непригоден.

Займёмся убыстрением сходимости. Если из ряда

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

вычесть почленно ряд

$$\ln(1-x) = -x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \ldots - \tfrac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots,$$

получающийся из него при смене знака x, то получим:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \ldots + \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right). \qquad (5)$$

Этот ряд, как и его прародители, сходится при $x \in (-1;\, 1)$. Легко видеть, что дробь $\frac{1+x}{1-x}$ при значениях x из указанного интервала принимает любые значения на положительной полуоси $(0;\, +\infty)$. Если надо вычислить $\ln 2$, то какое значение аргумента следует подставить в (5)? Опуская громоздкие

утомительные промежуточные выкладки [24], укажем без доказательства, что решением уравнения $\frac{1+x}{1-x} = 2$ является $x = \frac{1}{3}$. Итак,

$$\ln 2 = \ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right)\Big|_{x=1/3} = \\ = 2\Bigg(\underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5 + \ldots + \tfrac{1}{2n-1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n-1}}_{S_n} + \\ + \underbrace{\tfrac{1}{2n+1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n+1} + \ldots}_{R_n}\Bigg).$$

Получился з н а к о п о л о ж и т е л ь н ы й числовой ряд, и для оценки остатка используем второй метод:

$$R_n = 2\left(\tfrac{1}{2n+1}\,\tfrac{1}{3^{2n+1}} + \tfrac{1}{2n+3}\,\tfrac{1}{3^{2n+3}} + \tfrac{1}{2n+5}\,\tfrac{1}{3^{2n+5}} + \ldots\right) < \\ < 2\left(\tfrac{1}{2n+1}\,\tfrac{1}{3^{2n+1}} + \tfrac{1}{2n+1}\,\tfrac{1}{3^{2n+3}} + \tfrac{1}{2n+1}\,\tfrac{1}{3^{2n+5}} + \ldots\right) = \\ = 2\,\tfrac{1}{2n+1}\,\tfrac{1}{3^{2n+1}}\Big(\underbrace{1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^4} + \ldots}_{\text{Геом. прогр.; } b_1=1,\, q=\frac{1}{9}}\Big) = 2\,\tfrac{1}{2n+1}\,\tfrac{1}{3^{2n+1}}\,\tfrac{1}{1-\frac{1}{9}} = \tfrac{1}{4(2n+1)}\,\tfrac{1}{3^{2n-1}} < 10^{-5}$$

при $n = 5$. Итак, сумма ряда $S \approx S_5 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,3^3} + \frac{1}{5\,3^5} + \frac{1}{7\,3^7} + \frac{1}{9\,3^9}\right)$; окончательно, $\ln 2 \approx 0{,}69314$.

Вычисление интегралов. Ряды применяются в тех случаях, когда интеграл — неберущийся или хотя бы и берущийся, но имеющий громоздкую первообразную.

П р и м е р 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

Как известно, интеграл от любой дробно-рациональной функции б е р ё т с я, т.е. выражается в к о н е ч н о м виде через элементарные функции. Однако в данном примере, где требуется ч и с л е н н о е значение интеграла, расчёт с помощью первообразной к цели не приведёт:

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{x}}{4}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)\Bigg|_0^{1/2} = ?$$

Непонятно, как теперь в ы ч и с л и т ь логарифм и арктангенс.

Между тем нет ничего проще, чем вычислить этот интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в ряд с последующим почленным

[24] Попытайтесь всё-таки их восстановить!

интегрированием:

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \overset{\substack{\text{Геом. прогр.;}\\ b_1=1,\, q=-x^4}}{=} \int\limits_0^{1/2} \left(1 - x^4 + x^8 - \ldots\right)\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \ldots\right)\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^5\,5}}_{S_2} + \underbrace{\frac{1}{2^9\,9} - \ldots}_{R_2<1/(2^9 9)<0{,}001}$$

Итак, $\int\limits_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{160} = 0{,}494$, причём все значащие цифры здесь верные.

Пример 2. Выразить в виде ряда *интегральный синус* $\mathrm{Si}\,(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Эта функция трансцендентна, т. е. не выражается в конечном виде через элементарные функции. Поскольку

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

(ряд сходится всюду),

$$\mathrm{Si}\,(z) = \int\limits_0^z \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots\right)\mathrm{d}x =$$

$$= z - \frac{z^3}{3!\,3} + \frac{z^5}{5!\,5} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} + \ldots$$

Теперь легко вычисляются значения интегрального синуса. Например,

$$\mathrm{Si}\,(1) = \underbrace{1 - \frac{1}{3!\,3}}_{S_2} + \underbrace{\frac{1}{5!\,5} - \ldots}_{R_2 \le 1/(5!\,5)\,=\,1/600},$$

и $\mathrm{Si}\,(1) \approx S_2 = 1 - \frac{1}{18} \approx 0{,}944$, а поскольку гарантирована точность $\frac{1}{600} < 0{,}002$, в полученном ответе последняя значащая цифра после запятой может отличаться от истинной не более чем на 1.

Решение дифференциальных уравнений.

1. Метод последовательного дифференцирования применяется для дифференциальных уравнений (ДУ), разрешённых относительно старшей производной, при наличии начальных условий.

Пусть, например, требуется найти решение $y = y(x)$ ДУ второго порядка $y''(x) = f(x,\, y,\, y')$, удовлетворяющее двум *начальным условиям* (НУ) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Решение отыскивается в виде ряда Тейлора в окрестности начальной точки x_0:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots,$$

причём $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ известны из начальных условий, $y''(x_0)$ определяется из самогó ДУ подстановкой в его правую часть $f(x, y, y')$ значений x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$; $y'''(x_0)$ отыскивается дифференцированием обеих частей ДУ по x с последующей подстановкой уже найденных величин и т.д.

Пример. Решить ДУ $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = 1$.

Поскольку начальное условие задано в нуле, ищем решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = \overbrace{y(0)}^{=1 \text{ из НУ}} + \overbrace{y'(0)}^{=1 \text{ из ДУ}} \frac{x}{1!} + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + y^{\text{IV}}(0)\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Дифференцируем ДУ: $y'' = 2yy' + 3^2$, $\quad y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2 = 2$;
$y''' = 2y'y' + 2yy'' + 6x$, $\quad y'''(0) = 6$;
$y^{\text{IV}} = 2\big(2y'y'' + yy''' + y'y'' + 3\big)$, $\quad y^{\text{IV}}(0) = 0$.

Искомое решение ДУ:

$$y(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{30}{4!}x^4 + \ldots = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \ldots$$

2. Метод неопределённых коэффициентов — применяется для линейных ДУ [25]. Решение отыскивается в виде степеннóго ряда

$$y(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (6)$$

с неопределёнными коэффициентами, причём x_0 — точка, в которой заданы НУ. Подстановка пробной функции (6) в ДУ и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения позволяют найти коэффициенты A_i. Заметим, что при отсутствии НУ в решение ДУ n-го порядка войдут n неопределяемых коэффициентов, играющих роль произвольных констант.

Пример. Решить ДУ $y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

[25] в них искомая функция и её производные присутствуют только в первой степени.

Будем искать решение в виде

$$y(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

Из первого НУ получаем $A_0 = 1$. Продифференцировав пробную функцию:

$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots,$$

из второго НУ находим $A_1 = 0$. Вторая производная

$$y'' = 2A_2 + 6A_3 x + \ldots + n(n-1)A_n x^{n-2} + \ldots$$

Подставим все ряды в ДУ:

$$\begin{aligned}&\left[2A_2 + 6A_3 x + \ldots + n(n-1)A_n x^{n-2} + \ldots\right] - \\ &\qquad - x\left[A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots\right] - \\ &\qquad\qquad - \left[A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots\right] = 0.\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при степенях x:

при x^0	$2A_2 - A_0 = 0$	$\Rightarrow$	$A_2 = \frac{1}{2}$,
при x^1	$6A_3 - 2A_1 = 0$	$\Rightarrow$	$A_3 = 0$,
. . . . .	. . . . .		. . . . .
при x^{n-2}	$n(n-1)A_n - (n-2)A_{n-2} - A_{n-2} = 0$	$\Rightarrow$	$A_n = \frac{1}{n} A_{n-2}$,
. . . . .	. . . . .		. . . . .

Итак, получено рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда:

$$A_n = \frac{1}{n} A_{n-2}.$$

С помощью него, зная $A_1 = 0$, находим

$$A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0,$$

а $A_0 = 1$ позволяет найти коэффициенты с чётными номерами:

$$A_2 = \frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = \frac{1}{4} A_2 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^2 2!}, \quad A_6 = \frac{1}{6} A_4 = \frac{1}{48} = \frac{1}{2^3 3!}, \ldots$$

Замечаем общую закономерность: $A_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ (разумеется, она нуждается в доказательстве).

Окончательно, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{x^2/2}$.

Заметим, что возможность свернуть полученный ряд к некоторой известной функции — это редкая удача. Обычно приходится ограничиваться

начальными слагаемыми ряда, что, кстати, является одним из недостатков решения ДУ с помощью рядов — оценка погрешности данного метода трудна.

Глава II

РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Основные понятия

Многие понятия, вводимые для векторов (скалярное произведение, длина, ортогональность), оказывается возможным распространить на функции, играющие, таким образом, роль своеобразных векторов в особых функциональных пространствах. Этот путь является кратчайшим для введения в ряды Фурье [1].

Пусть на отрезке $[a;\, b]$ заданы непрерывные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Их *скалярным произведением* называется число, обозначаемое как $\big(\varphi_1(x),\, \varphi_2(x)\big)$ и равное интегралу от их произведения: $\int\limits_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Для функции $\varphi(x)$ *нормой* [2] $\|\varphi\|$ называется число

$$\sqrt{\big(\varphi(x),\, \varphi(x)\big)} = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Если $\int\limits_a^b \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$, то функция $\varphi(x)$ называется *нормированной* на отрезке $[a;\, b]$.

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ называются *ортогональными* на отрезке $[a;\, b]$, если их скалярное произведение обращается в нуль:

$$\big(\varphi_1(x),\, \varphi_2(x)\big) = \int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Рассмотрим теперь систему $\{\varphi_i(x)\}$ непрерывных на $[a;\, b]$ функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots$, среди которых нет тождественно равных нулю.

---

[1] Жан Батист Жозеф Фурье (J.B. Fourier, 1768-1830), франц. математик. Во время Великой французской революции едва не попал под гильотину за защиту жертв террора. Сопровождал Наполеона в египетском походе; составил подробный каталог добытых сокровищ. В 1807 г., в связи с исследованиями по теплопроводности, открыл способ представления функций тригонометрическими рядами, которые хотя и рассматривались иногда ранее, только у Фурье стали важнейшим орудием математической физики.

[2] Это аналог длины вектора.

Эта система называется *ортогональной* на $[a;\, b]$, если любые две различные функции системы ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{при } m \neq n.$$

Система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots$ называется *нормированной* на отрезке $[a;\, b]$, если нормирована каждая из функций системы.

Система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots$ называется *ортонормированной* на отрезке $[a;\, b]$, если функции системы ортогональны и нормированы:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \left\{ \begin{smallmatrix} 1, & m=n; \\ 0, & m\neq n \end{smallmatrix} \right. = \delta_{mn}$$

(δ_{mn} есть символ Кронекера).

Как нормировать функцию $\varphi_n(x)$, если она таковой не является? Если квадрат нормы $\|\varphi_n\|^2 = \int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\mathrm{d}x = \lambda_n$, то функция $\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}$ станет нормированной. Действительно,

$$\left\| \tfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\|^2 = \int_a^b \left(\tfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right)^2 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1.$$

Подобно тому, как пространственный вектор $\boldsymbol{x}$ раскладывается по базису $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$, функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по функциям ортогональной на $[a;\, b]$ системы $\{\varphi_i(x)\}$:

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x). \qquad (7)$$

Этот ряд называется *рядом Фурье*, а числа a_n — *коэффициентами Фурье*. В том случае, когда разложение ведётся по синусам и косинусам (см. ниже), говорят о *тригонометрическом* ряде Фурье. Если же $\{\varphi_i(x)\}$ являются функциями другого вида, ряд Фурье называется *обобщённым*.

Чтобы найти коэффициенты Фурье, скалярно умножим обе части соотношения (7) на k-ю функцию системы:

$$\big(f(x),\, \varphi_k(x)\big) =$$
$$= a_1 \underbrace{\big(\varphi_1(x),\, \varphi_k(x)\big)}_{=0} + a_2 \underbrace{\big(\varphi_2(x),\, \varphi_k(x)\big)}_{=0} + \ldots + a_k \underbrace{\big(\varphi_k(x),\, \varphi_k(x)\big)}_{\neq 0} + \ldots$$

Из всей суммы в правой части этого соотношения, в силу ортогональности системы $\{\varphi_i(x)\}$, отличным от нуля является только k-е слагаемое [3], и мы получаем выражение для коэффициента Фурье:

$$a_k = \frac{(f,\, \varphi_k)}{(\varphi_k,\, \varphi_k)}\,. \tag{8}$$

2. Тригонометрические ряды Фурье

Функция вида $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ называется *простой гармоникой.* Здесь A — амплитуда, ω — (круговая или циклическая) частота [4], φ — фаза. Простой гармонике можно придать другой вид, используя формулу синуса суммы:

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) = \underbrace{A\sin\varphi}_{=a}\cos\omega x + \underbrace{A\cos\varphi}_{=b}\sin\omega x = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

причём $a^2 + b^2 = A^2\sin^2\varphi + A^2\cos^2\varphi = A^2$, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Сложная гармоника

Рассмотрим сумму простых гармоник

$$y_1 = A_1\sin(\omega_1 x + \varphi_1), \quad y_2 = A_2\sin(\omega_2 x + \varphi_2).$$

1) При совпадающих частотах $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$y_1 + y_2 = (a_1\cos\omega x + b_1\sin\omega x) + (a_2\cos\omega x + b_2\sin\omega x) = \\ = (a_1 + a_2)\cos\omega x + (b_1 + b_2)\sin\omega x.$$

Это опять простая гармоника (синусоида) с той же частотой.

2) Если частоты *соизмеримы*, т.е. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ (простая несократимая дробь), то $\omega_1 n = \omega_2 m$ или $T_1 m = T_2 n$. Сумма простых гармоник $y_1 + y_2$ есть периодическая функция с периодом $T = T_1 m = T_2 n$, но уже не синусоида.

3) Если частоты *несоизмеримы*, т.е. отношение частот иррационально: $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, то сумма простых гармоник $y_1 + y_2$ есть непериодическая функция. Примером могут служить гармоники $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin\pi x$, для которых отношение частот $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pi$ есть число иррациональное.

---

[3] Напомним, что среди функций $\varphi_i(x)$ нет тождественно равных нулю.

[4] связанная с периодом T соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Сумма конечного числа простых гармоник с соизмеримыми частотами называется *сложной гармоникой*.

Сумма конечного числа простых гармоник с кратными частотами называется *тригонометрическим полиномом*:

$$a_0 + \underbrace{(a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x)}_{\text{период } T_1 = 2\pi/\omega} + \underbrace{(a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x)}_{\text{период } T_2 = 2\pi/2\omega} + \ldots + \\ + \underbrace{(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)}_{\text{период } T_n = 2\pi/n\omega}.$$

Тригонометрический полином имеет, очевидно, период $T = T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, в котором целое число раз укладывается каждый из периодов $T_2, \ldots, T_n$.

При $n \to \infty$ из тригонометрического полинома получается *тригонометрический ряд Фурье* [5]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x). \qquad (9)$$

Тригонометрический ряд Фурье является периодической функцией с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Теорема об ортогональности тригонометрических функций

Система функций

$$\{1,\ \sin \omega x,\ \cos \omega x,\ \sin 2\omega x,\ \cos 2\omega x, \ldots, \sin n\omega x,\ \cos n\omega x, \ldots\}$$

является ортогональной системой на отрезке $[-\ell,\ \ell]$, *где* $\ell = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$. *Норма каждой из функций* $\sin k\omega x$, $\cos k\omega x$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) есть* $\sqrt{\pi/\omega}$; $\|1\| = \sqrt{2\pi/\omega}$.

Доказательство. Учитывая, как вводится скалярное произведение для функций (С. 42), проверим ортогональность:

1) $(1,\ \sin k\omega x) = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin k\omega x \, \mathrm{d}x = 0$ (интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку!);

2) $(1,\ \cos k\omega x) = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos k\omega x \, \mathrm{d}x = 2 \int\limits_{0}^{\ell} \cos k\omega x \, \mathrm{d}x = 2 \left. \frac{\sin k\omega x}{k\omega} \right|_0^{\ell} = \frac{2}{k\omega} \sin k\omega \frac{\pi}{\omega} =$
$= \frac{2}{k\omega} \sin \pi k = 0$;

[5] Пусть читатель не удивляется, увидев в литературе формулу с $\frac{a_0}{2}$ — просто этот коэффициент может быть иначе определён (см. С. 47).

3) $(\sin k\omega x,\, \cos n\omega x) = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin k\omega x\, \cos n\omega x\, \mathrm{d}x = 0$ (см. ч. 1 доказательства);

4) ортогональность синусов:

$$(\sin k\omega x,\, \sin n\omega x) = \int_{-\ell}^{\ell} \sin k\omega x\, \sin n\omega x\, \mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \big[\cos(k-n)\omega x - \cos(k+n)\omega x\big]\, \mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\underbrace{\big(1,\, \cos(k-n)\omega x\big)}_{=0\ \text{(см. п.2)}} - \underbrace{\big(1,\, \cos(k+n)\omega x\big)}_{=0\ \text{(см. п.2)}}\Big] = 0;$$

5) $(\cos k\omega x,\, \cos n\omega x) = 0$ (вычисляется аналогично — переходом от произведения к сумме).

Ортогональность доказана.

Перейдём к вычислению нормы функций.

$\|\sin k\omega x\|^2 = (\sin k\omega x,\, \sin k\omega x) = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin^2 k\omega x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell} (1 - \cos 2k\omega x)\, \mathrm{d}x = \ell$,

норма $\|\sin k\omega x\| = \sqrt{\ell} = \sqrt{\pi/\omega}$.

Аналогично вычисляется $\|\cos k\omega x\| = \sqrt{\ell} = \sqrt{\pi/\omega}$. Здесь $k \neq 0$.

При $k = 0$: $\|1\|^2 = \int\limits_{-\ell}^{\ell} 1^2\, \mathrm{d}x = 2\ell = 2\pi/\omega$, откуда $\|1\| = \sqrt{2\pi/\omega}$.

Теорема доказана.

На основании данной теоремы, используя формулу (8), мы можем вычислить коэффициенты тригонометрического ряда Фурье (9):

$$a_n = \frac{(f(x),\, \cos n\omega x)}{(\cos n\omega x,\, \cos n\omega x)} = \frac{1}{\|\cos n\omega x\|^2} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos n\omega x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos n\omega x \mathrm{d}x.$$

Аналогично,

$$b_n = \frac{(f(x),\, \sin n\omega x)}{(\sin n\omega x,\, \sin n\omega x)} = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin n\omega x\, \mathrm{d}x.$$

Особняком стоит коэффициент a_0 [6]:

$$a_0 = \frac{(f(x),\, \cos 0\omega x)}{(\cos 0\omega x,\, \cos 0\omega x)} = \frac{(f(x),\, 1)}{(1,\, 1)} = \frac{\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\ell}^{\ell} 1^2\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (10)$$

Ещё раз повторим, что в литературе встречается и иное определение коэффициента a_0 [7] .

Заметим, что интегралы, фигурирующие в формулах для коэффициентов Фурье, можно вычислять по любому интервалу с длиной, равной периоду $T = 2\ell$ раскладываемой функции: $\forall\lambda \quad \int\limits_{-\ell}^{\ell}\ldots\mathrm{d}x = \int\limits_{\lambda-\ell}^{\lambda+\ell}\ldots\mathrm{d}x$. Значение λ выбирается из соображений удобства расчётов.

3. Разложимость функции в ряд Фурье

Ф о р м а л ь н о для всякой интегрируемой на отрезке $[-\ell;\, \ell]$ функции $f(x)$ можно составить ряд Фурье (9). Однако между функцией и этим рядом не всегда можно поставить знак равенства. Как это имело место в случае ряда Тейлора (см. С. 30), ряд Фурье может:
1) расходиться; 2) сходиться, но не к $f(x)$; 3) сходиться к само́й $f(x)$ — в последнем случае функция называется *разложимой* в ряд Фурье.

Сформулируем два д о с т а т о ч н ы х условия разложимости функции в ряд Фурье.

1. Условие Дирихле [8]: *Функция $f(x)$ периодична с периодом $T = 2\ell$, к у с о ч н о н е п р е р ы в н а и к у с о ч н о м о н о т о н н а на отрезке $[-\ell;\, \ell]$.*

---

[6] Подумайте, нужно ли вычислять b_0.

[7] При ином определении ряд Фурье записывается в виде $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$, зато в (10) вместо $\frac{1}{2\ell}$ фигурирует тогда $\frac{1}{\ell}$.

[8] Петер Густав Лежён Дирихле (P. Lejeune Dirichlet, 1805-1859), нем. математик. Уже в 12-летнем возрасте покупал книги по математике, откладывая на них карманные деньги. Исследованиями условий разложимости функций в ряды Фурье стал заниматься под влиянием лекций Фурье, которые посещал, обучаясь в 1820-х годах в Париже. Впервые точно сформулировал понятие условной сходимости рядов. Получил также важные результаты в теории чисел и математической физике. В его честь назван кратер на Луне.

Поясним, что функция называется *кусочно непрерывной* на $[a;\, b]$, если она непрерывна всюду на этом отрезке за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Кусочная монотонность на $[a;\, b]$ означает, что этот отрезок можно разбить на конечное число участков монотонности.

2. **Условие гладкости**: *Функция $f(x)$ периодична с периодом $T = 2\ell$ и кусочно гладка на отрезке $[-\ell;\, \ell]$.*

Кусочная гладкость на $[a;\, b]$ означает, что $f(x)$ и $f'(x)$ кусочно непрерывны на этом отрезке. График гладкой функции — плавная кривая, не имеющая угловых точек.

Условия 1 и 2 не взаимосвязаны, что иллюстрирует следующий

Пример. Покажем, что функция $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}\,, & x\neq 0, \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$ на любом отрезке $[-\ell;\, \ell]$ удовлетворяет условию гладкости, но не удовлетворяет условию Дирихле.

При $x \neq 0$ функция $f(x)$ (как и её производная $f'(x)$) непрерывна как суперпозиция элементарных функций. Единственная точка, внушающая опасения, есть точка $x = 0$. Но $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$ (произведение бесконечно малой и ограниченной функций). Поэтому функция непрерывна в нуле.

Проверим непрерывность $f'(x)$ в нуле. При $x \neq 0$

$$f'(x) = 3x^2 \sin\tfrac{1}{x} - x\cos\tfrac{1}{x}\,.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} = 0$ (опять произведение бесконечно малой и ограниченной). Производная в нуле

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^3 \sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, т.е. производная тоже непрерывна в нуле. Функция удовлетворяет определению кусочной гладкости.

Рассмотрим теперь последовательность $x_k = \frac{1}{\pi k}$, стремящуюся к нулю при $k \to \infty$. Поскольку $f(x_k) = 0$, вблизи нуля график функции бесконечное число раз пересекает ось абсцисс (рис. II.1) , а между двумя нулями

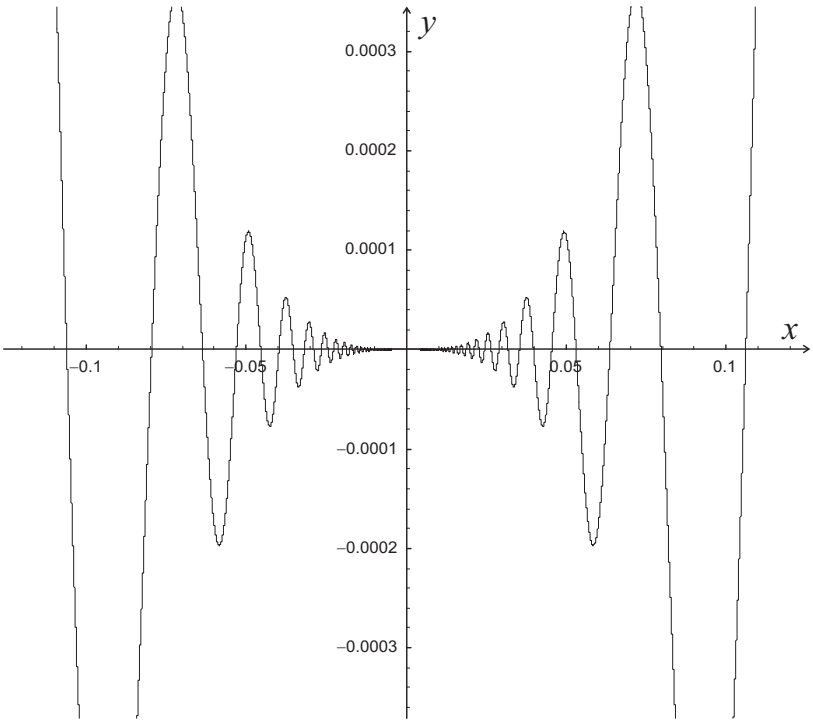

Рис. II.1. Выполнение условия гладкости может сопровождаться нарушением условия Дирихле

непрерывная функция обязательно имеет экстремум (теорема Ролля!). Поэтому экстремумов и, соответственно, участков монотонности на отрезке $[-\ell;\ \ell]$ бесконечно много. Условие Дирихле не выполнено.

Теорема о достаточном условии разложимости в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ периодична с периодом 2ℓ и удовлетворяет на отрезке $[-\ell;\ \ell]$ условию Дирихле или условию гладкости. Тогда:
1) Ряд Фурье для функции сходится на всей числовой оси;
2) Сумма ряда Фурье $S(x)$ совпадает со значением раскладываемой функции $f(x)$ во всех точках её непрерывности: $S(x) = f(x)$. Если x_0 — точка разрыва первого рода для $f(x)$, то в этой точке сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому значений раскладываемой функции слева и справа от разрыва: $S(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Из теоремы следует, что значения раскладываемой функции в точках её разрыва не влияют на значения коэффициентов Фурье. Поэтому функции, имеющие одни и те же точки разрыва и отличающиеся друг от друга значениями лишь в этих точках, раскладываются в один и тот же ряд Фурье. Равным образом, если изменить значение $f(x)$ в некоторых точках отрезка $[-\ell;\ \ell]$, то ряд Фурье не изменится!

Тот факт, что для 2ℓ-периодической функции $f(x)$ на $[-\ell;\,\ell]$ значение функции совпадает с суммой ряда Фурье для неё, $f(x) = S(x)$, во всех точках, кроме конечного множества точек разрыва первого рода (т.е. *почти всюду*), условно будем записывать с помощью знака $\overset{\text{пв}}{=}$ — *«равно почти всюду»*.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1\ , & x\in\ [-\pi;\,0), \\ 2\ , & x\in\ [0;\,\pi) \end{cases}$ с периодом $T = 2\ell = 2\pi$.

Круговая частота $\omega = \frac{\pi}{\ell} = 1$, поэтому

$$a_n = \frac{(f(x),\,\cos nx)}{(\cos nx,\,\cos nx)} = \frac{1}{\|\cos nx\|^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} 2\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + 2\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0.$$

Отдельно вычислим нулевой коэффициент Фурье:

$$a_0 = \frac{(f(x),\,\cos 0\,x)}{(\cos 0\,x,\,\cos 0\,x)} = \frac{(f(x),\,1)}{(1,\,1)} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} 1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} 2\,\mathrm{d}x\right] = \frac{3}{2}\,.$$

Аналогично,

$$b_n = \frac{(f(x),\,\sin nx)}{(\sin nx,\,\sin nx)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} 2\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - 2\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n} + \frac{\cos\pi n}{n} - 2\,\frac{\cos\pi n}{n} + \frac{2}{n}\right] = \frac{1-\cos\pi n}{\pi n} =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & , \quad \text{если } n \text{ чётен}, \\ \frac{2}{\pi n} & , \quad \text{если } n \text{ нечётен} \end{array}\right\} = \tfrac{2}{\pi n}\,\delta_{n,\,2k+1}.$$

Итак, b_n отличны от нуля лишь при нечётных номерах $n = 2k+1,\ k\in\mathbb{N}$, что компактно записывается при введении δ-символа Кронекера.

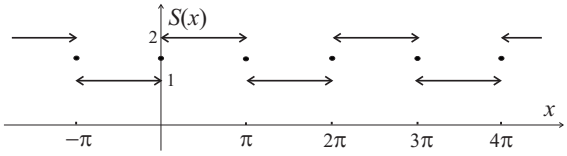

Рис. II.2. График суммы ряда Фурье совпадает с графиком раскладываемой функции всюду, кроме точек разрыва

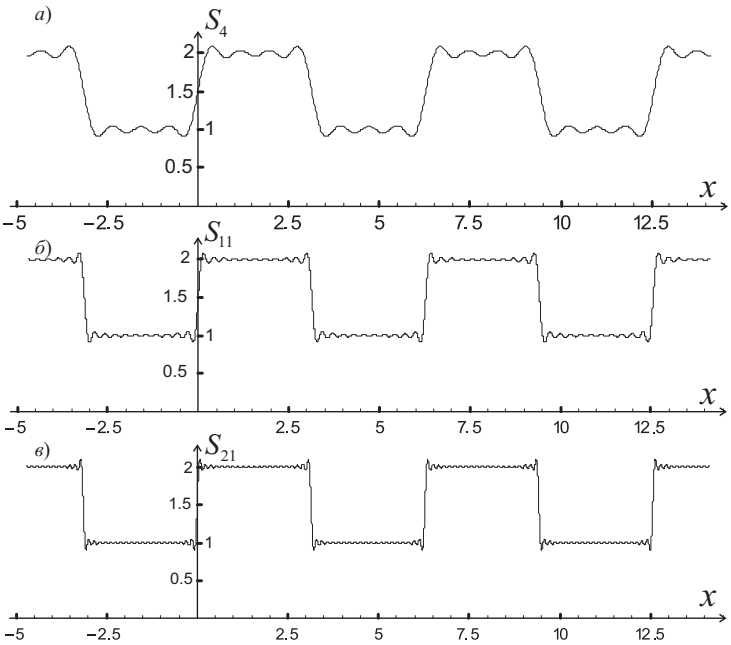

Рис. II.3. Частичные суммы ряда Фурье (11) для случаев $\frac{3}{2}+\sum\limits_{k=0}^{m}\ldots$ при $m=3$ (*а*), $m=10$ (*б*) и $m=20$ (*в*)

Таким образом, ряд Фурье принимает вид [9]

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\,\delta_{n,\,2k+1}\,\sin nx = \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)}\,\sin(2k+1)x. \qquad (11)$$

Напомним, что знак равенства между функцией $f(x)$ и суммой ряда Фурье для неё можно поставить в точках непрерывности $f(x)$. В точках разрыва x_0 сумма ряда равна $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ — полусумме ординат слева и справа от разрыва. График суммы ряда Фурье представлен на рис. II.2. Для сравнения на рис. II.3 представлены графики частичных сумм ряда (11).

В качестве интересного следствия полученного разложения рассмотрим пример вычисления суммы ч и с л о в о г о ряда.

[9]Раскладываемая функция удовлетворяет условиям теоремы о достаточном условии разложимости, поэтому ряд Фурье сходится именно к $f(x)$. Заметим, что коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $k \to \infty$. Это общее требование. Иначе и быть не может, ибо в противном случае ряд не сходился бы.

П р и м е р. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Рассмотрим формулу (11) при $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\underbrace{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=2} = \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \underbrace{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}_{=(-1)^k},$$

откуда

$$2 - \frac{3}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{или} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Особенности разложения для функций частного вида

1 а. Функция $f(x)$ — ч ё т н а я, 2ℓ-периодическая. Тогда

$$a_n = \frac{(f(x),\, \cos n\omega x)}{(\cos n\omega x,\, \cos n\omega x)} = \frac{1}{\|\cos n\omega x\|^2} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos n\omega x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \underbrace{f(x) \cos n\omega x}_{\text{чётная функция}} \mathrm{d}x = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} f(x) \cos n\omega x \, \mathrm{d}x$$

(по свойству интеграла от чётной функции с симметричными пределами уполовинили область интегрирования, удваивая при этом сам интеграл). Ту же операцию можно проделать и с интегралом для вычисления a_0.

Коэффициенты при синусах

$$b_n = \frac{(f(x),\, \sin n\omega x)}{(\sin n\omega x,\, \sin n\omega x)} = \frac{1}{\|\sin n\omega x\|^2} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \underbrace{f(x) \sin n\omega x}_{\text{нечёт. функция}} \mathrm{d}x = 0$$

по свойству интеграла от нечётной функции с симметричными пределами.

Итак, ряд Фурье для чётной функции н е с о д е р ж и т с и н у с о в:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega x.$$

1 б. Функция $f(x)$ — н е ч ё т н а я, 2ℓ-периодическая. Тогда, наоборот, все коэффициенты a_n обратятся в нуль, а b_n останутся [10]:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \underbrace{f(x)\cos n\omega x}_{\text{нечёт. функция}}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \frac{(f(x),\,\sin n\omega x)}{(\sin n\omega x,\,\sin n\omega x)} = \frac{1}{\|\sin n\omega x\|^2}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \underbrace{f(x)\sin n\omega x}_{\text{чётная функция}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} f(x)\sin n\omega x\,\mathrm{d}x.$$

2. Функция $f(x)$ — непериодическая. Разложить н е п е р и о д и ч е с к у ю функцию в ряд Фурье на в с е й области её определения, конечно, невозможно. Но если сумма ряда Фурье должна совпадать со значениями $f(x)$ на некотором к о н е ч н о м интервале, можно периодически продолжить $f(x)$ за пределами этого интервала, и тогда новая п е р и о д и ч е с к а я функция уже разложима в ряд Фурье, который будет сходиться к значениям $f(x)$ на исходном интервале [11]. Возможны следующие случаи:

а) $f(x)$ задана на $[a,\,b]$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Искусственно сделанная периодической функция имеет период $T = b - a$ (рис. II.4 *а*).

б) $f(x)$ задана на $[0,\,\ell]$. В этом случае для периодического продолжения появляются несколько возможностей:

- поступить согласно случаю а);
- продолжить функцию ч ё т н о, а затем периодически (рис. II.4 *б*). Тогда период новой функции $T = 2\ell$, в ряд Фурье войдут только косинусы;

[10] В предыдущем примере функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной, но $\big(f(x) - 1{,}5\big)$ есть функция н е ч ё т н а я. Поэтому из всех коэффициентов при косинусах остаётся только $a_0 = 3/2$, определяющий параллельный перенос графика с сохранением его формы, а коэффициентов при синусах бесконечно много.

[11] Напомним, что при вычислении коэффициентов Фурье a_n, b_n интегралы можно брать по любому интервалу длиной, равной периоду.

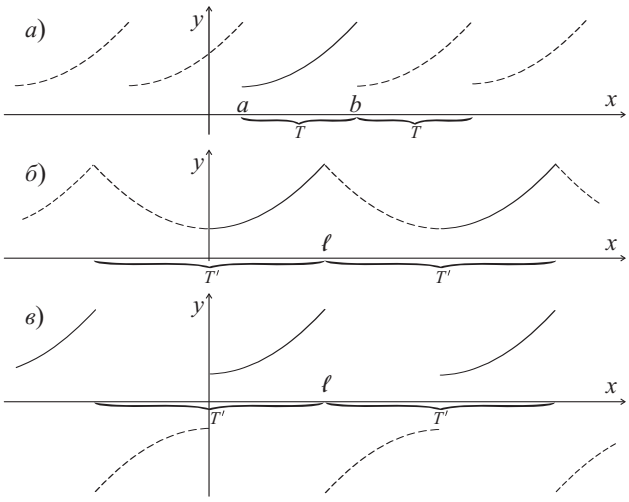

Рис. II.4. Варианты периодического продолжения непериодической функции

- продолжить функцию нечётно, а затем периодически (см. рис. II.4 *в*). Период новой функции $T = 2\ell$, в ряд войдут только синусы.

Пример. Разложить функцию $f(x) = x$, $x \in [0, \pi)$, в ряд Фурье а) по синусам; б) по косинусам.

а) Продолжаем функцию нечётным образом, а затем периодически (см. рис. II.5 *а*). Для новой функции $f_1(x)$ период $T = 2\pi$, круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Все коэффициенты при косинусах обратятся в нуль: $a_n = 0$. Вычисляем коэффициенты при синусах:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f_1(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x = -2\,\frac{\cos\pi n}{n} = -\,\frac{2}{n}\,(-1)^n = \frac{2}{n}\,(-1)^{n+1}.$$

Итого, ряд Фурье имеет вид

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin nx.$$

График суммы ряда представлен на рис. II.6 *а*. Для всех $x \in [0, \pi)$ сумма ряда Фурье совпадает со значениями $f(x)$.

б) Продолжаем функцию чётным образом, а затем периодически (см. рис. II.5 *б*). Для новой функции $f_2(x)$ период $T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Все коэффициенты при синусах равны нулю: $b_n = 0$. Коэффициенты при косинусах

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f_2(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x = -\,\frac{4}{\pi n^2}\,\delta_{n,\,2k+1}, \quad a_0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

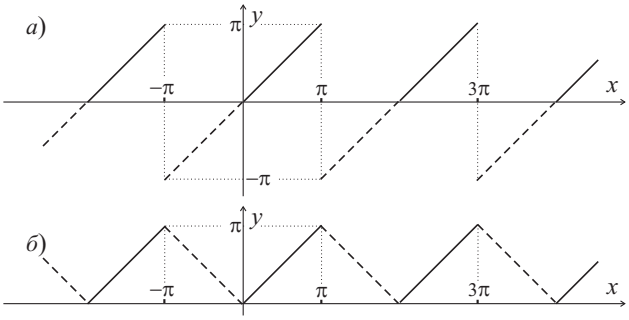

Рис. II.5. Периодическое продолжение функции $f(x) = x$ нечётным (а) и чётным (б) образом

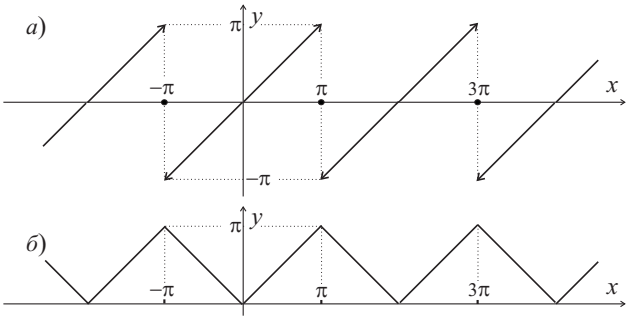

Рис. II.6. График суммы ряда Фурье при периодическом нечётном (а) и чётном (б) продолжении функции $f(x) = x$

Итого, ряд Фурье имеет вид

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_{n,\,2k+1}}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

График суммы ряда представлен на рис. II.6 *а*. Для всех $x \in [0,\, \pi)$ сумма ряда Фурье по-прежнему совпадает со значениями $f(x)$.

Интересное следствие последней формулы: при $x = \pi$

$$f(x) = \pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\underbrace{\cos(2k+1)\pi}_{=\,-1},$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Комплексный ряд Фурье

Тригонометрический ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega x + b_n\sin n\omega x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x + b_n\sin n\omega x) \qquad (12)$$

можно преобразовать на основании формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, связывающей синус и косинус с показательной функцией мнимого аргумента. Тогда $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, и из двух соотношений получаем

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Отсюда

$$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x =$$
$$= a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} = c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}, \quad (n \neq 0),$$

где

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

При $n = 0$ имеем не две экспоненты $e^{in\omega x}$, $e^{-in\omega x}$, а одну $e^{i0\omega x}$, так что [12]

$$c_0 = a_0 .$$

Учитывая выражения для коэффициентов Фурье

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x \,\mathrm{d}x,$$

получим

$$c_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x \mathrm{d}x - \frac{i}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x \,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\Big[\cos n\omega x - i\sin n\omega x\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-in\omega x}\mathrm{d}x;$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x \mathrm{d}x + \frac{i}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x \,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\Big[\cos n\omega x + i\sin n\omega x\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{in\omega x}\mathrm{d}x.$$

[12] Будем считать, что $b_0 = 0$.

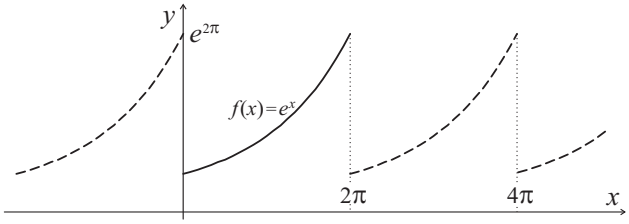

Рис. II.7. 2π-периодически продолженная экспонента

Эти два выражения можно записать в виде единой формулы

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-in\omega x}\mathrm{d}x \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots). \tag{13}$$

Заметим, что если $f(x)$ — действительная функция, то коэффициенты a_n, b_n действительны, а c_n и c_{-n} представляют собой пару комплексно сопряжённых чисел: $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Теперь формулу (12) можно преобразовать к виду

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega x} + c_{-n}e^{-in\omega x}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}. \tag{14}$$

Итак, если функция $f(x)$ периодична с периодом 2ℓ, кусочно непрерывна и кусочно монотонна на $[-\ell,\ \ell]$, то функция разложима в *комплексный ряд Фурье* (14) [13].

Иногда оказывается удобным сначала раскладывать функцию именно в комплексный ряд Фурье и лишь потом при необходимости переходить от него к вещественной форме ряда. Поскольку $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, коэффициенты вещественного ряда Фурье определятся так: $a_n = \mathrm{Re}(2c_n)$, $b_n = -\mathrm{Im}(2c_n)$ $(n \neq 0)$. При $n = 0$ формула особая: $a_0 = c_0$.

Пример. Функцию $f(x) = e^x$, $x \in [0,\ 2\pi]$, продолженную 2π-периодически (см. рис. II.7), разложить в вещественный ряд Фурье.

Очевидно, что функция кусочно непрерывна и кусочно монотонна, т.е. разложима в ряд Фурье. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, поэтому вещественный ряд Фурье выглядел бы как

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

[13] Непосредственный смысл равенство в (14) имеет в точках непрерывности $f(x)$. Если x — точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то левую часть равенства в (14) надо, как и ранее, заменить на $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. О смысле обозначения «пв» см. на С. 50

Но нахождение коэффициентов Фурье трудоёмко — пришлось бы вычислить $\int e^x \cos nx \, \mathrm{d}x$, $\int e^x \sin nx \, \mathrm{d}x$ путём двукратного интегрирования по частям (в о з в р а т н о е и н т е г р и р о в а н и е).

Между тем разложение в комплексный ряд Фурье

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

сопряжено с гораздо более простым вычислением коэффициентов c_n (13):

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} e^x e^{-inx} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{x(1-in)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi(1-in)} \, e^{x(1-in)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi(1-in)} \left[e^{2\pi} \underbrace{e^{-2\pi in}}_{\substack{\cos 2\pi n - \\ -i \sin 2\pi n = \\ = 1}} - 1 \right]$$

(напомним, что при вычислении коэффициентов Фурье интегралы можно брать по любому промежутку, длиной равному периоду раскладываемой функции).

Итак, коэффициенты комплексного ряда Фурье имеют вид

$$c_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-in)} = \frac{(1+in)(e^{2\pi}-1)}{2\pi(1+n^2)}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а сам ряд

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+in)}{(1+n^2)} \, e^{inx}.$$

Теперь нетрудно получить вещественный ряд Фурье:

$$a_n = \mathrm{Re}(2c_n) = \mathrm{Re}\left(2 \, \frac{(1+in)(e^{2\pi}-1)}{2\pi(1+n^2)} \right) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1+n^2)},$$

$$b_n = -\mathrm{Im}(2c_n) = -\mathrm{Im}\left(2 \, \frac{(1+in)(e^{2\pi}-1)}{2\pi(1+n^2)} \right) = -\frac{n(e^{2\pi}-1)}{\pi(1+n^2)},$$

$$a_0 = c_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi},$$

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n^2} \cos nx - \frac{n}{1+n^2} \sin nx \right).$$

6. Спектры периодической функции

Комплексная форма ряда Фурье

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x},$$

в которой индекс суммирования пробегает как положительные, так и отрицательные целые значения, формально допускает существование и положительных, и отрицательных частот $\omega_n = n\omega = n\,\frac{\pi}{\ell}$.

Последовательность $\left\{c_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ комплексных коэффициентов Фурье $c_n = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x$ функции $f(x)$ называется *комплексным частотным спектром* функции.

Модуль и аргумент этих комплексных чисел составляют спектральные характеристики функции.

Последовательность $\left\{A_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где

$$A_n = |c_n| = \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

называется *амплитудным частотным спектром* функции $f(x)$.

Последовательность $\left\{\varphi_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где

$$\varphi_n = \arg c_n = \arg\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\tfrac{b_n}{a_n}\right) = -\operatorname{arc\,tg}\left(\tfrac{b_n}{a_n}\right),$$

называется *фазовым частотным спектром* функции $f(x)$.

Для наглядного представления частотных спектров $\left\{A_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\left\{\varphi_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ периодической функции их изображают графически. Для этого по горизонтальной (частотной) оси ω откладывают значения $\omega_n = n\omega = n\,\frac{\pi}{\ell}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, и для каждой частоты ω_n перпендикулярно оси строят отрезок длиной A_n или $|\varphi_n|$, соответственно; в последнем случае отрезок откладывается выше или ниже оси ω сообразно знаку φ_n.

В силу кратности частот гармоник

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \tfrac{\pi}{\ell}\,(n+1) - \tfrac{\pi}{\ell}\,n = \tfrac{\pi}{\ell} = \omega = \mathrm{const}$$

каждый частотный спектр дискретен и эквидистантен (состоит из равноотстоящих отрезков).

Свойства частотных спектров.

1. Поскольку c_{-n} и c_n — комплексно сопряжённые числа, то амплитудный частотный спектр обладает осевой симметрией относительно вертикальной прямой $\omega = 0$:

$$A_{-n} = A_n\,,$$

а фазовый частотный спектр центрально-симметричен относительно точки $\omega = 0$ на оси частот:

$$\arg c_{-n} = -\arg c_n.$$

2. При $n \to \infty$ значения амплитуд $A_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \to 0$, поскольку для ряда Фурье $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

3. Фазовый частотный спектр $\left\{\varphi_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ограничен, т.к. область значений арктангенса — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

П р и м е р. Для функции предыдущего примера построить её частотные спектры.

Коэффициенты вещественного ряда Фурье уже вычислены:

$$a_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)}\,, \quad b_n = -\,\frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1 + n^2)}\,.$$

Тогда амплитудный частотный спектр

$$A_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}\,,$$

частотный фазовый спектр:

$$\varphi_n = -\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \mathrm{arc\,tg}\, n.$$

Спектры представлены на рис. II.8.

7. Интеграл Фурье

Для дальнейшего приведём ещё раз некоторые полученные результаты. При выполнении некоторых добавочных условий (С. 47) 2ℓ-периодическая функция $f(x)$ раскладывается в комплексный ряд Фурье

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \tag{15}$$

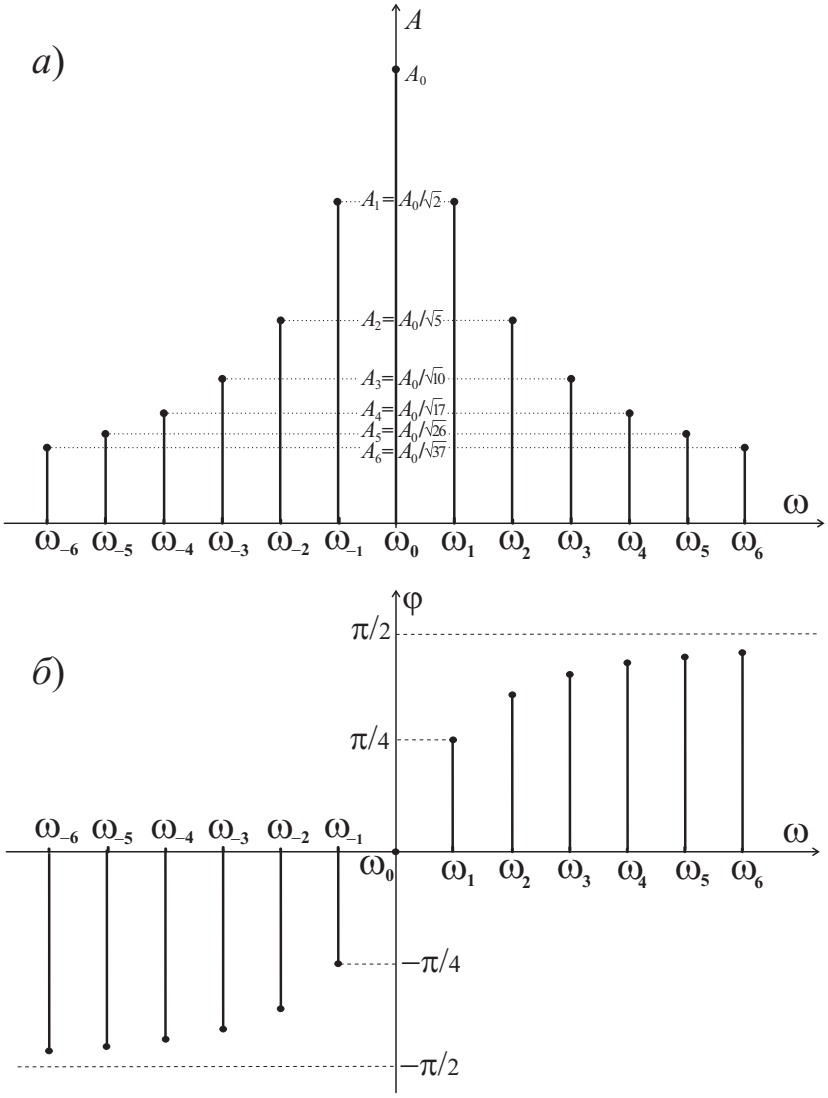

Рис. II.8. Амплитудный (а) и фазовый (б) частотные спектры для ряда Фурье периодически продолженной экспоненты (см. С. 57). В данной задаче $\omega_n = n$. На нижнем графике показаны асимптотические значения $\pm\pi/2$ для арктангенса

где

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi)e^{-i\omega_n\xi}\,\mathrm{d}\xi, \qquad \omega_n = \omega n = \frac{\pi}{\ell}\,n. \tag{16}$$

Ряд Фурье в вещественной форме имеет вид

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x + b_n\sin\omega_n x), \tag{17}$$

где

$$a_n = \tfrac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\cos\omega_n\xi\,\mathrm{d}\xi,$$

$$b_n = \tfrac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\sin\omega_n\xi\,\mathrm{d}\xi \quad (n = 1,\, 2, \ldots), \tag{18}$$

$$a_0 = \tfrac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

(переменная интегрирования обозначена через ξ).

Для непериодической функции $f(x)$, $x \in (-\infty,\, \infty)$, разложения в ряды (15), (17) невозможны. Существуют формулы, аналогичные (15), (17) и выражающие непериодическую $f(x)$ через несобственный интеграл специального вида — *интеграл Фурье*. Ограничимся эвристическими рассуждениями, не приводя строгого обоснования.

Пусть непериодическая функция $f(x)$:

i) на любом конечном отрезке кусочно непрерывна и кусочно монотонна ИЛИ

i′) на любом конечном отрезке кусочно гладка;

ii) кроме того, пусть она абсолютно интегрируема на $(-\infty,\, \infty)$, т.е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ сходится.

Рассмотрим сначала функцию $f(x)$ на конечном отрезке $[-\ell,\, \ell]$ и разложим её 2ℓ-периодическое продолжение в комплексный ряд Фурье (15), а затем расширим этот отрезок до всей числовой оси.

Подставляя выражение для коэффициентов Фурье (16) в (15), получим для $x \in [-\ell,\, \ell]$

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi)e^{-i\omega_n\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)e^{i\omega_n x}$$

или

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi)e^{i\omega_n(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right)\Delta\omega_n \tag{19}$$

(множитель $e^{i\omega_n x}$ не зависит от ξ и может быть внесён под знак интеграла; через $\Delta\omega_n$ обозначено приращение частоты: $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{\ell}$).

Интегралы под знаком суммы в правой части (19) будем считать значениями функции

$$\Phi(\omega) = \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi, \qquad \omega \in (-\infty, \infty)$$

при значениях аргумента $\omega = \omega_n$.

Можно ожидать, что при $\ell \to \infty$ равенство (19) перейдёт в приближённое равенство

$$f(x) \overset{\text{пв}}{\approx} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega_n(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi \right) \Delta\omega_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_n)\Delta\omega_n. \tag{20}$$

Последняя сумма похожа на интегральную сумму функции $\Phi(\omega)$ на $(-\infty, \infty)$. Поскольку при $\ell \to \infty$ $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{\ell} \to 0$, то естественно считать, что $\lim\limits_{\Delta\omega_n \to 0} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_n)\Delta\omega_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{d}\omega$, причём приближённое равенство в (20) заменится точным.

Справедлива следующая

Теорема Фурье

Если непериодическая функция $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяет условиям i (i′) *и* ii, *то имеет место равенство*

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\omega, \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{21}$$

Это равенство называется *интегральной формулой Фурье* для функции $f(x)$, а её правая часть — *интегралом Фурье* (в комплексной форме) для данной функции.

Интегральную формулу Фурье записывают ещё так:

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi \right) e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{22}$$

Функция

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{23}$$

называется *спектральной функцией* (или *спектральной плотностью*) функции $f(x)$. Как правило, она является комплекснозначной функцией частоты.

Отметим, что внешний интеграл в (22) вычисляется как несобственный интеграл в смысле главного значения:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega = \lim_{M\to+\infty}\int\limits_{-M}^{M} F(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Действительнозначные функции $A(\omega) = |F(\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg F(\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, называются *амплитудной* и *фазовой спектральными функциями* (*характеристиками*) непериодической функции $f(x)$. Их называют также амплитудным и фазовым *частотными спектрами* функции $f(x)$. Графики их — непрерывные кривые (ср. со С.59).

Сопоставим свойства ряда и интеграла Фурье:

Ряд Фурье	Интеграл Фурье
$f(x)$ — 2ℓ-периодическая функция, $x \in (-\infty, \infty)$;	$f(x)$ — непериодическая функция, $x \in (-\infty, \infty)$;
ω_n — дискретная переменная (частота), принимающая значения $0, \pm\frac{\pi}{\ell}, \ldots, \pm n\,\frac{\pi}{\ell}, \ldots$;	ω — непрерывная переменная, принимающая значения от $-\infty$ до ∞;
$f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$ — функциональный ряд, в котором $c_n = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(\xi)e^{-i\omega_n\xi}\mathrm{d}\xi$ — число, зависящее от дискретного индекса $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;	$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$ — несобственный интеграл, в котором $F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi$ — функция, определённая на $(-\infty, \infty)$;
$\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — комплексный частотный спектр функции $f(x)$.	$F(\omega)$ — комплекснозначная спектральная функция для $f(x)$.

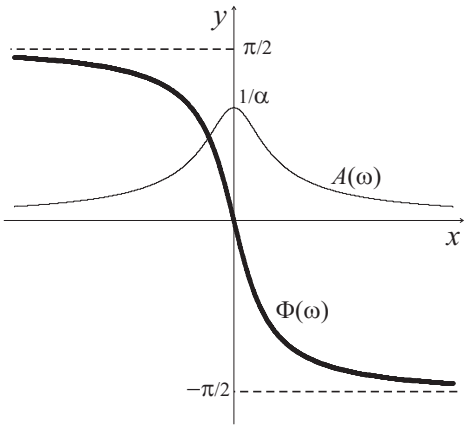

Рис. II.9. Амплитудный $A(\omega)$ и фазовый $\varphi(\omega)$ частотные спектры для функции из примера на С. 65

Свойства частотных спектров непериодической функции

1. Амплитудный спектр $A(\omega)$ — чётная функция, график её симметричен относительно прямой $\omega = 0$.

Действительно, из (23) следует, что $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$, поэтому

$$A(-\omega) = |F(-\omega)| = |F(\omega)| = A(\omega).$$

2. Ось $O\omega$ является асимптотой амплитудного спектра, т.е. $\lim\limits_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0$ (ср. с рис. II.9).

3. Фазовый частотный спектр $\varphi(\omega) = \arg F(\omega)$ ограничен и симметричен относительно точки $\omega = 0$ на оси $O\omega$ (ср. с рис. II.9).

Пример. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad \alpha > 0,$$

представить интегралом Фурье. Найти её спектры.

Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$, то функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. На всяком отрезке конечной длины $f(x)$ — кусочно гладкая. Поэтому для неё выполнены условия разложения в интеграл Фурье, т.е.

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega,$$

где $F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\xi}\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{\alpha+i\omega}\, e^{-(\alpha+i\omega)\xi}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+i\omega}$,

поскольку $\lim\limits_{\xi\to\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\xi} = \lim\limits_{\xi\to\infty} e^{-\alpha\xi}\left(\cos\omega\xi - i\sin\omega\xi\right) = 0.$

Итак, функцию $f(x)$ можно представить комплексным интегралом Фурье

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\alpha + i\omega}\,\mathrm{d}\omega. \tag{24}$$

Для нахождения спектральных функций $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ преобразуем спектральную функцию:

$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2},$$

откуда получаем

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Im} F(\omega)}{\operatorname{Re} F(\omega)} = \operatorname{arc\,tg}\frac{-\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}}{\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}} = -\operatorname{arc\,tg}\tfrac{\omega}{\alpha}.$$

Графики этих функций представлены на рис. II.9.

8. Различные формы записи интеграла Фурье

От интеграла Фурье в комплексной форме (21) можно перейти к интегралу Фурье в действительной форме, воспользовавшись формулой Эйлера для экспоненты с мнимым показателем:

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\Big[\cos\omega(x-\xi) + i\sin\omega(x-\xi)\Big]\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\omega$$

или

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\omega + \\ + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\omega.$$

Но функция $\sin\omega(x-\xi)$ нечётна по ω, поэтому интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$ — также нечётная по ω функция. Интеграл от нечётной функции на $(-\infty, \infty)$ равен нулю [14], т.е. второе слагаемое в последней

[14] Напомним, что интеграл понимается в смысле главного значения.

формуле пропадает. С другой стороны, в первом слагаемом мы имеем интеграл от чётной функции в симметричных пределах $(-\infty, \infty)$, поэтому можно взять удвоенное значение интеграла по уполовиненным пределам:

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \omega(x-\xi) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\omega. \tag{25}$$

Получен интеграл Фурье в д е й с т в и т е л ь н о й форме.

П р и м е р. От комплексной формы интеграла Фурье (24) в предыдущем примере перейти к действительной форме.

Преобразуем интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega x}}{\alpha + i\omega} \mathrm{d}\omega = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(\cos \omega x + i \sin \omega x)(\alpha - i\omega)}{(\alpha + i\omega)\,(\alpha - i\omega)} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\alpha \cos \omega x + \omega \sin \omega x}{\alpha^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega + i \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\alpha \sin \omega x - \omega \cos \omega x}{\alpha^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega =$$

$$= 2 \int\limits_0^\infty \frac{\alpha \cos \omega x + \omega \sin \omega x}{\alpha^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega\,,$$

(один из интегралов обращается в нуль в силу нечётности подынтегральной функции по ω).

Окончательно, интеграл Фурье в действительной форме для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\alpha \cos \omega x + \omega \sin \omega x}{\alpha^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega.$$

Если раскрыть $\cos \omega(x-\xi)$ в (25), то получим интеграл Фурье в форме, напоминающей тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi) \Big[\cos \omega x \cos \omega \xi + \sin \omega x \sin \omega \xi \Big] \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\omega$$

или

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty \Big[a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x \Big] \mathrm{d}\omega, \qquad x \in (-\infty, \infty), \tag{26}$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi, \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi \mathrm{d}\xi. \tag{27}$$

Аналогично тому, как это делалось в рядах Фурье (С. 52), получаются специальные формулы в случае наличия определённой чётности у раскладываемой функции:

1) $f(x)$ — чётная, тогда $b(\omega) = 0$, $f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty a(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$, где $a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi$;

2) $f(x)$ — нечётная, тогда $a(\omega) = 0$, $f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty b(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega$, где $b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\xi)\sin\omega\xi\,\mathrm{d}\xi$.

П р и м е р. Представить интегралом Фурье вида (26) функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1; & |x| \le 1, \\ 0; & |x| > 1. \end{cases}$$

Функция чётна, поэтому $b(\omega) = 0$;

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\omega\xi}{\omega}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,.$$

Итак,

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega,$$

где, напомним, буквы «пв» (почти всюду) означают, что последний интеграл сходится к функции $\begin{cases} 1, & \text{если } |x|\le 1, \\ 0, & \text{если } |x|>1, \\ 1/2, & \text{если } |x|=1. \end{cases}$

Интересное следствие отсюда: при $x = 0$ получаем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = 1 \quad \text{или} \quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}\,.$$

В качестве побочного результата вычислен несобственный интеграл для функции, первообразная которой не является элементарной функцией.

9. Преобразование Фурье

Пусть непериодическая функция $f(x)$ удовлетворяет достаточным условиям разложения в интеграл Фурье (см. С. 63); тогда

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{28}$$

где

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x, \quad \omega \in (-\infty, \infty). \tag{29}$$

Операция, ставящая функции $f(x)$ в соответствие функцию $F(\omega)$ согласно (29), называется *прямым преобразованием Фурье* (сокращённо ППФ).

Операция, ставящая функции $F(\omega)$ в соответствие функцию $f(x)$ согласно (28), называется *обратным преобразованием Фурье* (сокращённо ОПФ).

Функция, допускающая ППФ, называется *оригиналом*, а функция, получающаяся в результате ППФ — *изображением по Фурье* (*Фурье-образом*).

Соответствие между оригиналом $f(x)$ и изображением $F(\omega)$ будем символически изображать так: $f(x) \risingdotseq F(\omega)$.

Можно показать, что множество оригиналов и множество изображений — линейные функциональные пространства.

Некоторые действия над оригиналами сводятся к более простым действиям над их изображениями (см. ниже). Поэтому исходную (сложную) задачу для оригинала можно с помощью ППФ свести к менее трудоёмкой для изображения, найти её решение, а затем с помощью ОПФ вернуться в пространство оригиналов к искомому решению.

Свойства преобразования Фурье

1) Преобразование Фурье л и н е й н о, т.е. если $f(x) \risingdotseq F(\omega)$ и $g(x) \risingdotseq G(\omega)$, то $\alpha f(x) + \beta g(x) \risingdotseq \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$, где α, β — произвольные числа.

Это следует из линейности операции интегрирования.

2) Д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е о р и г и н а л а

Пусть $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$, а $f'(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Тогда, если $f(x) \risingdotseq F(\omega)$, то $f'(x) \risingdotseq i\omega F(\omega)$. Итак, дифференцированию оригинала соответствует более простая (а л г е б р а и ч е с к а я) операция над Фурье-образом.

Действительно,

$$f'(x) \risingdotseq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\underline{\boldsymbol{f'(x)}}\ \underbrace{e^{-i\omega x}}_{=u}\ \underline{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}}^{=\mathbf{d}\boldsymbol{v}} \overset{\substack{\text{по}\\ \text{частям}}}{=}$$

$$= \underbrace{\overbrace{e^{-i\omega x} f(x)}^{=uv}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = i\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = i\omega F(\omega).$$

2′) Более общее свойство:

$$f^{(k)}(x) \risingdotseq (i\omega)^k F(\omega).$$

3) Интегрирование оригинала

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$, а интеграл $\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда, если $f(x) \risingdotseq F(\omega)$, то $\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \risingdotseq -\frac{i}{\omega} F(\omega)$. Мы видим, что и интегрирование оригинала заменяется более простой операцией над Фурье-образом.

Действительно,

$$\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \risingdotseq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t}^{=u} \underbrace{e^{-i\omega x}\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}v} = \underbrace{\overbrace{\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t}^{u\to 0}\ \frac{1}{-i\omega}\ \overbrace{e^{-i\omega x}}^{v\ \text{огранич.}}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} -$$

$$- \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{1}{-i\omega}\,e^{-i\omega x}\mathrm{d}x}_{=v\,\mathrm{d}u} = -\frac{i}{\omega}\,F(\omega).$$

4) Теорема запаздывания

Пусть $f(x) \risingdotseq F(\omega)$. Тогда $f(x-\beta) \risingdotseq e^{-i\omega\beta}F(\omega)$.

Действительно,

$$f(x-\beta) \risingdotseq \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-\beta)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix}\text{замена}\\ x-\beta=u\end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+\beta)}\mathrm{d}u = e^{-i\omega\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u = e^{-i\omega\beta}F(\omega).$$

4′) Можно объединить свойства 3 и 4:

$$\int\limits_0^{x-\beta} f(t)\mathrm{d}t \risingdotseq -\tfrac{i}{\omega}\, e^{-i\omega\beta} F(\omega).$$

5) Теорема смещения

Пусть $f(x) \risingdotseq F(\omega)$. Тогда $e^{i\beta x} f(x) \risingdotseq F(\omega-\beta)$.

Действительно,

$$e^{i\beta x} f(x) \risingdotseq \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x} f(x) e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega-\beta)x}\mathrm{d}x = F(\omega-\beta).$$

6) Приведём без доказательства ещё два свойства преобразования Фурье:

$$f(ax) \risingdotseq \tfrac{1}{|a|}\, F\left(\tfrac{\omega}{a}\right), \qquad (-i)^k x^k f(x) \risingdotseq F^{(k)}(\omega)$$

(теоремы подобия и интегрирования изображения соответственно).

Пример. Задача о свободных малых колебаниях тонкой бесконечно длинной упругой струны [15] (рис. II.10) сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,\, t)$$

при начальных условиях

$$u(x,\, 0) = \varphi(x) \qquad \text{— начальная форма струны,}$$

$$u'_t(x,\, 0) = \psi(x) \qquad \text{— начальные скорости точек струны.}$$

Здесь a — скорость распространения колебаний по струне.

[15] Это одна из классических задач математической физики. Колебания свободны, если они вызваны не внешней вынуждающей силой, а отклонением точек струны $u(x,\, t)$ от равновесного положения (пусть это будет ось Ox) и приданием им скорости u'_t в начальный момент времени $t = 0$. Колебания считаются малыми, если u и u'_x малы. Упругость струны означает обратимость её деформаций, т.е. отсутствие тепловых потерь.

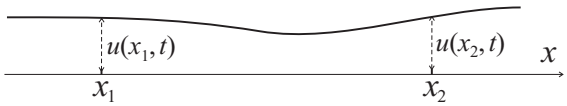

Рис. II.10. Функция $u(x,\, t)$ описывает форму струны, т.е. отклонение точки струны с абсциссой x в момент времени t от равновесного (невозмущённого) положения — оси Ox

Совершим преобразование Фурье по координате: $u(x,\, t) \risingdotseq U(\omega,\, t)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq (i\omega)^2 U(\omega,\, t) \quad - \quad \text{дифференцирование оригинала,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, t^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,\, t) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{\partial^2 U(\omega,\, t)}{\partial t^2}\,.$$

В итоге вместо уравнения в частных производных для оригинала получается обыкновенное дифференциальное уравнение для Фурье-образа:

$$\frac{\partial^2 U(\omega,\, t)}{\partial t^2} = -(a\omega)^2\, U(\omega,\, t), \tag{30}$$

а начальные условия для Фурье-образа преобразуются к виду:

$$U(\omega,\, 0) = \Phi(\omega), \qquad U'_t(\omega,\, 0) = \Psi(\omega). \tag{31}$$

Итак, получена задача Коши (30)–(31).

Подстановка Эйлера $U(\omega,\, t) = Ce^{\lambda t}$ в (30) приводит к характеристическому уравнению $\lambda^2 + (a\omega)^2 = 0$ с корнями $\lambda_{1,\,2} = \pm\, ia\omega$. Общее решение уравнения (30): $U(\omega,\, t) = C_1 e^{ia\omega t} + C_2 e^{-ia\omega t}$; константы C_1, C_2 найдём из начальных условий (31):

$$U(\omega,\, 0) = C_1 + C_2 = \Phi(\omega),$$
$$U'_t(\omega,\, 0) = ia\omega(C_1 - C_2) = \Psi(\omega).$$

Тогда $C_1 = -\frac{i}{2a\omega}\,\Psi(\omega) + \frac{1}{2}\,\Phi(\omega)$, $C_2 = \frac{i}{2a\omega}\,\Psi(\omega) + \frac{1}{2}\,\Phi(\omega)$. Подставляя их в общее решение, получим:

$$U(\omega,\, t) = \left(-\tfrac{i}{2a\omega}\,\Psi(\omega) + \tfrac{1}{2}\,\Phi(\omega)\right) e^{ia\omega t} + \left(\tfrac{i}{2a\omega}\,\Psi(\omega) + \tfrac{1}{2}\,\Phi(\omega)\right) e^{-ia\omega t} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\Phi(\omega) e^{ia\omega t} + \Phi(\omega) e^{-ia\omega t}\right] - \tfrac{1}{2a}\,\tfrac{i}{\omega}\left\{\Psi(\omega) e^{ia\omega t} - \Psi(\omega) e^{-ia\omega t}\right\}. \tag{32}$$

Итак, для Фурье-образа задача решена, и надо по изображению найти оригинал $u(x,\,t)$. К выражению $\big[\ldots\big]$ в (32) применим теорему запаздывания, а к $\big\{\ldots\big\}$ — свойство $4'$, и тогда

$$u(x,\,t) = \tfrac{1}{2}\,\varphi(x+at) - \tfrac{1}{2}\,\varphi(x-at) + \tfrac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(u)\mathrm{d}u - \tfrac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(u)\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(u)\mathrm{d}u. \qquad (33)$$

Формула (33) есть знаменитая формула Д'Аламбера для малых колебаний струны [16].

[16] Выяснение её смысла выходит за рамки нашего предмета и будет предпринято в курсе математической физики.

Библиографический список

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. 800 с.

[2] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. 760 с.

[3] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1974. 480 с.

[4] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1965. 656 с.

[5] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.

[6] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.3 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1989. 352 с.

[7] Воробьёв Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьёв. М.: Наука, 1986. 408 с.

[8] Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1985. 464 с.

[9] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. М.: Наука, 1986, 528 с.

[10] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. СПб.: ИЧП «Кристалл», 1994, 496 с.

[11] Шмелёв П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А. Шмелёв. М.: Высш. шк., 1983. 176 с.

[12] Сборник задач по математике для втузов, Т.2: Специальные разделы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович (ред.). М.: Наука, 1981, 368 с.

[13] Ляшко И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001, 224 с.

Оглавление

Учебник

ЗЕНКОВ Андрей Вячеславович

РЯДЫ

и

РЯДЫ ФУРЬЕ

Редактор *Н.В. Рощина*

Оригинал-макет: *А.В. Зенков*

ИД № 06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16		
Бумага типографская	Цифровая печать		Усл. печ. л. 4,6
Уч.-изд. л. 3,6	Тираж	Заказ	Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ–УПИ

620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ–УПИ

620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19

⌘

⌘

РЯДЫ · И · РЯДЫ · ФУРЬЕ