Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет — УПИ»

В. Б. Винокурова, Л. М. Пироговская, В.В. Трещева

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Учебник
для студентов технологических специальностей

Научный редактор доц. В.Б. Грахов

Екатеринбург
2006

УДК 519. 2
ББК 22.17
В 49

Рецензенты:
кафедра математики Уральского государственного горного университета, зав. кафедрой проф., д-р физ.-мат. наук В.Б. Сурнев;
проф., д-р физ.-мат. наук В. Б. Репницкий (Уральский государственный университет им. А. М. Горького, кафедра алгебры и дискретной математики)

Авторы: В. Б. Винокурова, Л. М. Пироговская, В.В. Трещева

В 49 Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебно-методическое пособие. / В. Б. Винокурова, Л.М. Пироговская, В.В. Трещева. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. 68 с.

ISBN 5-321-00631-8

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с действующей программой. Изложен теоретический материал, решены типовые задачи, приведены задачи для самостоятельного решения.

Библиогр.: 13 назв. Рис. 32. Табл.10. Прил.5.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 5-321-00631-8

1. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика – это учение об образовании групп, соединений, комбинаций.

Пусть известны три элемента *a, b, c.* Составим из них соединения *abc, acb, bac, bca, cab, cba.* Все эти соединения отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов.

Определение 1. Соединения, отличающиеся *только* порядком элементов, называют ***перестановками.***

Число всех возможных перестановок P_n из n элементов вычисляют по формуле

$$P_n = n!.$$

В нашем примере число перестановок из трех элементов

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Но из этих же трех элементов *(a,b,c)* можно составлять соединения по два элемента в каждом: *ab, ac, bc, ba, ca, cb*. Эти соединения отличаются друг от друга или порядком элементов, или одним элементом.

Определение 2. Соединения, отличающиеся друг от друга *или порядком* элементов, или *хотя бы одним элементом*, называются ***размещениями.***

Число всех возможных размещений A_n^m из n элементов по m вычисляют по формуле

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]}_{m\ сомножителей}.$$

Можно число размещений подсчитать и по другой формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

В нашем примере число размещений из трех элементов по два следующее:

$$A_3^2 = 3(3-1) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Пересмотрев все размещения, можно удалить из них соединения, отличающиеся только порядком элементов, т.е. останутся соединения, отличающиеся одним элементом: *ab, ac, bc.*

Определение 3. *Соединения,* отличающиеся друг от друга *хотя бы одним* элементом, называются ***сочетаниями.***

Число всех возможных сочетаний C_n^m. из n элементов по m вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В нашем примере: $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$.

Пример 1.1. Сколько существует способов отобрать команду в 6 человек из 10 спортсменов?

Решение. Одна команда от другой команды должна отличаться *хотя бы* одним спортсменом, чтобы мы могли утверждать, что создана другая команда, т.е. мы имеем дело с сочетаниями. Их число:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Пример 1.2. Десять спортсменов разыгрывают одну золотую, одну серебряную, одну бронзовую медали. Сколько существует способов распределения медалей между спортсменами?

Решение. Способов распределения медалей среди спортсменов существует столько, сколько можно составить размещений из десяти спортсменов по три, т.к. способы могут отличаться друг от друга как порядком (получать золотую медаль или бронзовую – это разница), так и хотя бы одним спортсменом

$$A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 .$$

Пример 1.3. Сколько различных четырехзначных чисел можно получить из цифр 3, 4, 5, 6?

Решение. Числа могут отличаться друг от друга только порядком входящих в их написание цифр, т.е. их может быть ровно столько, сколько можно составить перестановок из четырех элементов

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского – на любой другой из этих языков?

2. Для участия в команде тренер обучает пять мальчиков из десяти. Каким количеством способов он может сформировать команду, если два определенных мальчика должны войти в команду?

3. Каким количеством способов можно в строчку написать шесть плюсов и четыре минуса?

Замечание. Если написали плюсы, то этим уже определено положение минусов.

4. Проверьте, что число трех буквенных “слов”, которые можно образовать из букв слова “гипотенуза”, равно числу всех возможных перестановок слова “призма”.

Ответы: 1) 20; 2) 56; 3) 210; 4) $A_{10}^{3} = 720$; $P_6 = 720$.

2. Основные понятия теории вероятностей

2.1. События

К основным понятиям теории вероятностей относятся *испытание, событие, вероятность.*

1. Под “испытанием” будем понимать любой процесс, происходящий вокруг нас.

2. Результаты испытаний, опытов, наблюдений называют *событиями.*

Например, экзамен – испытание; студент получил “отлично” – событие; планета “Земля” вращается вокруг своей оси – испытание, смена дня и ночи – событие; подбрасывание игральной кости – испытание, выпадение четного числа очков – событие.

Различают события трех видов:

а) достоверные, которые в результате испытаний всегда наступают;

б) невозможные, которые никогда не могут произойти;

с) случайные, результаты которых не прогнозируются единственным образом.

Например, падение подброшенной монеты на землю – событие достоверное, а ее неограниченное удаление от земли – невозможное событие. Падение монеты на определенную сторону (цифрой вверх или вниз) – событие случайное.

Условимся обозначать достоверное событие – U, невозможное – V, случайные – $A, B, C, \ldots$

Событие называют *элементарным,* или *исходом,* если оно "неразложимо" в данном опыте, т.е. в изучаемой ситуации нет необходимости рассматривать его состоящим из более простых событий.

Множество всех элементарных событий (исходов), связанных с данным опытом, называют *пространством элементарных событий*, которое отождествляется с достоверным событием.

Действия над событиями

Суммой *или* ***объединением*** событий A и B называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Обозначение суммы:

$$A+B \quad \text{или} \quad A \cup B.$$

Произведением или пересечением событий A и B называют событие, состоящее в одновременном наступлении событий и A, и B. Обозначение произведения: AB или $A \cap B$.

События A и B называют ***несовместными,*** если их произведение – событие невозможное, т.е. $AB = V$.

Понятия суммы и произведения событий имеют наглядную геометрическую интерпретацию.

Пусть событие A – множество точек области A; событие B – множество точек области B. Заштрихованная область соответствует событию AB на рис.1,а; событию $A+B$ на рис.1,б.

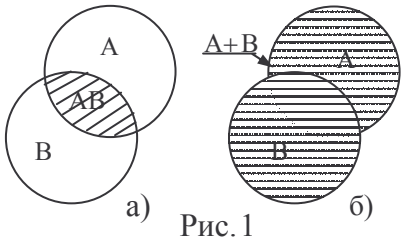

Рис. 1

Для несовместных событий A и B имеем: $AB=V$ (рис.2,а). Событию $A+B$ соответствует заштрихованная область на рис.2,б.

События A и $\overline{A}$ называют противоположными, если они несовместны и в сумме составляют достоверное событие, т.е.

$$A\,\overline{A}=V, \quad A+\overline{A}=U\,.$$

Например, произведем один выстрел по цели: событие A – стрелок попал в цель, $\overline{A}$ не попал; подброшена монета: событие A – выпадение орла, $\overline{A}$ – выпадение цифры; на контроль взято n деталей: событие A – хотя бы одна деталь бракованная, $\overline{A}$ – ни одной бракованной детали.

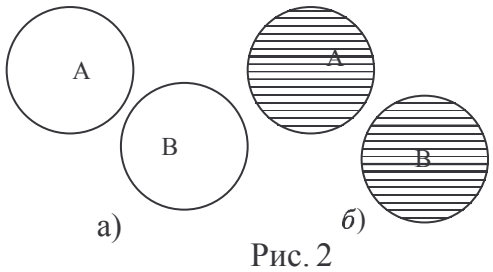

Рис. 2

Пример 2.1. Бросают игральный кубик – куб, сделанный из однородного материала, грани которого занумерованы. Наблюдают за числом (числом очков), выпадающим на верхней грани. Пусть событие A – появление нечетного числа, событие B – появление числа, кратного трем. Найти исходы, составляющие каждое из событий: U, A, $A+B$, AB и указать их смысл.

Решение. Исход – появление на верхней грани любого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Множество всех исходов составляет пространство элементарных событий $U = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ясно, что событие $A = \{1,3,5\}$, событие $B = \{3,6\}$.

Событие $A + B = \{1,3,5,6\}$ − появление либо нечетного числа, либо числа, кратного трем. При перечислении исходов учтено, что каждый исход в множестве может содержаться только один раз.

Событие $AB = \{3\}$ − появление и нечетного числа и числа, кратного трем.

Пример 2.2. Проверено домашнее задание у трех студентов. Пусть событие A_i − выполнение задания i-м студентом, $i = 1,2,3$. Каков смысл событий: $A = A_1 + A_2 + A_3$, $\overline{A}$ и $B = A_1 A_2 A_3$?

Решение. Событие $A = A_1 + A_2 + A_3$ − выполнение задания хотя бы одним студентом, т.е. или любым одним студентом (или первым, или вторым, или третьим), или любыми двумя, или всеми тремя.

Событие $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ − задание не выполнено ни одним студентом: ни первым, ни вторым ни третьим. Событие $B = A_1 A_2 A_3$ − выполнение задания тремя студентами: и первым, и вторым, и третьим.

Пример 2.3. Разрыв электрической цепи (событие A) может произойти вследствие выхода из строя некоторых из элементов I, II, III (соответствующие события A_1, A_2, A_3). Выразить событие A через события A_1, A_2, A_3 (рис.3).

Решение. Событие A может произойти в одном из случаев:

$A_1 A_2 A_3$ − выход из строя всех элементов;

$A_1 A_2 \overline{A_3}$ − выход из строя элементов I, II;

$A_1 \overline{A_2} A_3$ − выход из строя только I и III элемента.

Тогда $A = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3$.

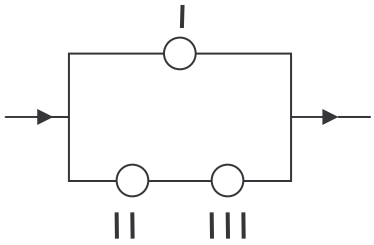

Рис. 3

Другой способ рассуждения: разрыв цепи произойдет либо при одновременном выходе элементов I и II (элемент III здесь роли не играет), либо, если элемент II работает, а I и III вышли из строя. Отсюда $A = A_1 A_2 + A_1 \overline{A_2} A_3$.

2.2. Вероятность

2.2.1. Относительная частота события. Статистическое определение вероятности

Пусть проведена серия из n испытаний при одних и тех же условиях; при этом фиксируется появление события A.

Допустим, что событие A произошло m раз. Число m называют ***частотой*** наступления события A. Ясно, что $0 \le m \le n$.

Относительной частотой события называют отношение $\frac{m}{n}$ − числа испытаний, в которых событие появилось, к числу всех проведенных испытаний.

Обозначение относительной частоты: $W(A) = \frac{m}{n}$.

Если проводить серии опытов с большим числом испытаний при одинаковых условиях, то во многих случаях относительная частота наблюдаемого со-

бытия будет мало меняться от серии к серии. Этот факт проверен многократно в различных экспериментах.

Определение. Число, около которого группируются относительные частоты при увеличении числа испытаний, называют статистической вероятностью рассматриваемого события *A* и обозначают *P(A)*.

Основной недостаток статистического определения вероятности состоит в необходимости проведения большого числа опытов.

2.2.2. Классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий *U* состоит из *конечного* числа *равновозможных* исходов $w_1, w_2, ..., w_n$. Например, из симметрии однородного игрального кубика вытекает равновозможность появления любого из чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Пусть элементарные события w_i попарно несовместны и $\sum_{i=1}^{n} w_i = U$.

Определение. Вероятностью события *A* называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (исходов, составляющих событие *A*), к общему числу всех равновозможных исходов в конечномерном пространстве элементарных событий, т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$, где *m* – число благоприятствующих событию *A* исходов, *n* – общее число несовместных, равновозможных элементарных исходов.

Свойства вероятностей

1) $P(A) \le 1$, т.к. $P(A) = \frac{m}{n}$, а $m \le n$.
2) $P(A) \ge 0$, т.к. $m \ge 0, n \ge 0$.
3) $P(U) = 1$, т.к. $m = n$.
4) $P(V) = 0$, т.к. $m = 0$.

2.2.3. Геометрическое определение вероятности

Если число равновозможных исходов бесконечно и они целиком заполняют некоторую область, то используют геометрическое определение вероятности.

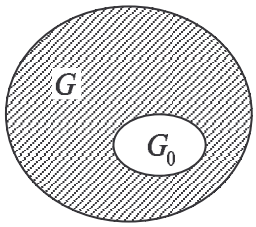

Рис. 4

Пусть каждый результат испытаний определяется случайным положением точки в некоторой области, мера которой *G* (рис.4). Под мерой области будем понимать длину, площадь, объем. Если G_0 − мера той области, попадание в которую благоприятствует событию *A*, то $P(A) = \frac{G_0}{G}$.

Геометрическое определение: вероятность есть отношение мер областей G_0 и G.

Пример 2.4. В ящике 5 черных, 7 красных, 8 белых шаров одного материала, размера, степени и способа обработки, температуры. Наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что он красный.

Решение. Любой красный шар из семи есть благоприятствующий исход

событию A – *взят красный шар*. Всего же исходов 5+7+8=20. Применимо классическое определение: $P(A)=\frac{7}{20}$.

Пример 2.5. Из 13 книг, среди которых 8 справочников, отобрано 9 книг. Найти вероятность того, что среди отобранных книг – 5 справочников (событие A).

Решение. Будем считать исходами любые группы из 13 книг по 9. Таких групп конечное число и вероятность отбора любой из них одинакова. Применимо классическое определение вероятности.

Отбираемые группы отличаются хотя бы одной книгой (элементом), причем порядок книг в группах безразличен. Число таких групп равно числу сочетаний из 13 элементов по 9, т.е.

$$n=C_{13}^{9},\ \text{где}\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad n!=1\cdot 2\cdot 3...n.$$

Благоприятные исходы – это те группы, в которых по 5 справочников. Чтобы найти их число, выделим среди книг справочники: 13=8+5. Число различных групп, составленных из 8 справочников по 5, равно C_8^5, а из оставшихся 5 книг по 4 книги – C_5^4. Объединяя (комбинируя) эти группы различными способами, получим благоприятные исходы. Их число $m=C_8^5\cdot C_5^4$.

По классическому определению,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_8^5\cdot C_5^4}{C_{13}^9}=\frac{56}{143}\approx 0,4.$$

Практический смысл полученного результата: если из 13 книг отбирать многократно по 9, то в среднем 4 раза из 10 (в 40% случаях) отобранная группа книг будет содержать 5 справочников.

Пример 2.6. На отрезке $[0,\ 2]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам: $x^2\le 2y\le 2x$.

Решение. Нам известно, что $0\le x\le 2$ и $0\le y\le 2$. Для их изображения воспользуемся системой координат (рис.5). Точки с координатами (x,y) заполнят квадрат со стороной, равной 2 ед. Решим графически систему неравенств: $2y\le 2x$, $x^2\le 2y$.

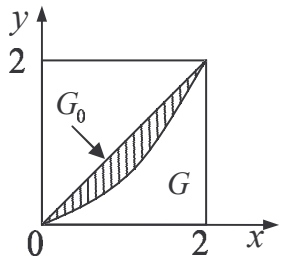

Рис. 5

Применим геометрическое определение вероятности, причем в качестве меры областей выступает площадь.

$$P(A)=\frac{G_0}{G}=\frac{\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx}{4}=\frac{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2}{4}=\frac{2-\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{6}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

2. В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки шести деталей: а) все стандартные, б) две нестандартные, в) хотя бы одна нестандартная.

3. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная в данном круге,

окажется внутри вписанного в него квадрата?

Ответы: 1. $\frac{5}{36}$; 2. а) $\approx 0{,}512$; б) $\approx 0{,}094$; в) $\approx 0{,}488$; 3. $\frac{2}{\pi}$.

2.3. Основные теоремы теории вероятностей

2.3.1. Теорема сложения вероятностей

Рассмотрим два совместных события A и B, полученных из некоторого опыта. Найдем вероятность $P(A+B)$. Воспользуемся тем, что $A+B=A+B\cdot\overline{A}$, где события A, $B\cdot\overline{A}$ несовместны (рис.6). Тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B\,\overline{A}). \qquad (2.1)$$

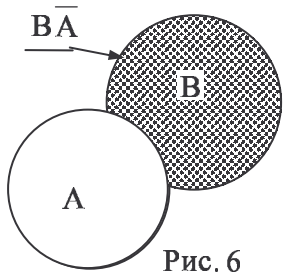

Рис. 6

Представим событие B в виде суммы несовместных событий: $B=B\,\overline{A}+AB$. Отсюда

$$P(B)=P(B\,\overline{A})+P(AB). \qquad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) исключим $P(B\overline{A})$ и получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Последнюю формулу называют ***теоремой сложения вероятностей.***

В частности, если событие A и B несовместны, т.е. $AB=V$, то выведенная формула переходит в формулу $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 2.7. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

Решение. Требование будет выполнено, если произойдет одно из следующих *несовместных событий:* B – один учебник в переплете, C – два учебника в переплете, D – три учебника в переплете, т.е. $A=B+C+D$. Т.к. события B, C, D – несовместны, по теореме сложения

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D),$$

где $P(B)=\frac{C_5^1C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91}$; $P(C)=\frac{C_5^2C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91}$; $P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}$. Итак,

$$P(A)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}.$$

Для отыскания вероятности суммы n совместных событий ($n\geq 3$) вводят в рассмотрение противоположные события. Так как $A+\overline{A}=U$, A и $\overline{A}$ – несовместны, то $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$ и $P(A)=1-P(\overline{A})$. Пусть $A=A_1+A_2+...+A_n$ – наступление хотя бы одного из событий $A_1,A_2,...,A_n$, тогда $\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n}$ – одновременное наступление всех противоположных событий. По формуле $P(A)=1-P(\overline{A})$ находим $P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n})$.

Пример 2.8. Из полного набора костей домино наудачу берут пять. Найти вероятность того, что среди отобранных будет хотя бы одна кость с шестеркой (событие A).

Решение. Вводим событие $\overline{A}$ – взятые пять костей не содержат ни одной шестерки. Вероятность находим по классическому определению, выделив из 28

костей (мысленно) 21 кость, не содержащую шестерок:

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} \approx 0,207 \ , \ P(A) = 1 - 0,207 = 0,793 \approx 0,8 .$$

Практический смысл результата: при многократном проведении опыта в среднем на 10 опытов будет 8 удач.

2.3.2. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Определение. Условной вероятностью события A при условии, что событие B наступило, называют величину $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ при $P(B) \neq 0$.

Аналогично определяется $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ – условная вероятность события B при условии, что событие A наступило.

Из записанных равенств находим

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) .$$

Эту формулу называют ***теоремой умножения вероятностей.***

Если справедливы равенства $P(A/B) = P(A)$ и $P(B/A) = P(B)$, то событие A и B называют независимыми. Можно показать, что теорема умножения распространяется на любое конечное число сомножителей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 ... A_{n-1}).$$

Пример 2.9. Два студента решают задачу. Вероятность того, что первый студент решит задачу (событие A), равна 0,9; вероятность того, что второй студент решит задачу (событие B), равна 0,8. Какова вероятность того, что задача будет решена?

Решение. Нас интересует событие C, которое состоит в том, что задача будет решена, т.е. первым, или вторым студентом, или двумя студентами одновременно. Таким образом, интересующее нас событие $C=A+B$. События A и B совместны, значит применима теорема сложения вероятностей для случая совместных событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Для нашего случая $P(A+B) = 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,98$ (события A и B совместны, но независимы).

Пример 2.10. Студент знает 20 вопросов из 25. Какова вероятность ответить на три вопроса, предложенных из 25?

Решение. Введем событие A_i – студент знает ответ на i-й предложенный вопрос, $i = 1,2,3$. События A_1, A_2, A_3 – зависимые. Поэтому

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 \cdot A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0,4 .$$

При отыскании вероятностей событий использовалось классическое определение вероятности.

Примеры для самостоятельного решения

1. Деталь с вероятностью 0,01 имеет дефект А, с вероятностью 0,02 имеет дефект В и с вероятностью 0,005 имеет оба дефекта. Найти вероятность того, что деталь имеет хотя бы один дефект. *Ответ:* 0,025.

2. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета? *Ответ:* 0,323.

3. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле – 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком. *Ответ:* 0,44.

2.4. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Систему событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называют *полной группой* событий, если выполняются условия: 1) $A_1 + A_2 + ... + A_n = U$; 2) $A_i A_j = V$ при $i \neq j$. Это значит, что события полной группы попарно несовместны и в результате каждого испытания должно обязательно появляться одно из событий A_i. Обозначим $P(A_i) = p_i$, тогда $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Примером полной группы событий является множество исходов $\{w_1, ..., w_n\}$, составляющих пространство U, т.е. $U = w_1 + ... + w_n$ и $w_i w_j = V$ при $i \neq j$.

Другой пример. Проводится опыт, состоящий в бросании игральной кости. Пусть A_i — событие, заключающееся в выпадении i очков на верхней грани этой кости, тогда события A_i – попарно несовместны ($A_i A_j = V$ при $i \neq j$) и в результате опыта обязательно должно появиться одно из событий A_i ($A_1 + A_2 + ... + A_n = U$). Значит, события A_i составляют полную группу событий, чего нельзя сказать о событиях B_1 – появление герба на первой монете и B_2 – появление цифры на второй монете в опыте, состоящем в одновременном подбрасывании двух монет (этому мешает хотя бы совместность событий B_1 и B_2).

Рассмотрим события $A, H_1, H_2, ..., H_n$, связанные с некоторым опытом, где $H_1, H_2, ..., H_n$ – события полной группы, т.е. они попарно несовместны и $\sum_{i=1}^{n} H_i = U$. Пусть известно, что событие A может произойти с одним из событий H_i полной группы и заданы вероятности $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$, $i = 1,2,...,n$. Требуется найти $P(A)$. Событие A представим в виде $A = AU = A\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} AH_i$.

В силу несовместности событий $AH_1, AH_2, ..., AH_n$ имеем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$, или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).$$

Это и есть ***формула полной вероятности***. Она объединяет теоремы сложения и умножения вероятностей.

События полной группы $H_1, H_2, ..., H_n$ обычно называют гипотезами. Их вероятности были известны до проведения опыта.

Если $P(A) \neq 0$, то по определению условной вероятности $P(H_k / A) = \dfrac{P(AH_k)}{P(A)}$, $k = 1, 2, ..., n$. Учитывая формулу полной вероятности и теорему умножения вероятностей, получим ***формулы Байеса***:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A / H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}.$$

Формулы Байеса служат для переоценки вероятностей гипотез после проведения эксперимента.

Пример 2.11. На сборку поступают детали с трех автоматов, производительность которых относится, как 5:3:2. Первый автомат в среднем дает 1% брака, второй – 2%, третий – 1,5%. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной?

Решение. Рассмотрим событие A – взятая наудачу деталь окажется стандартной и рассмотрим гипотезы H_i – деталь изготовлена на i-м автомате, где $i = 1,2,3$. Тогда $P(H_1) = 0,5$, $P(H_2) = 0,3$, $P(H_3) = 0,2$ (это следует из производительности автоматов). Из условия задачи $P(A / H_1) = 0,99$, $P(A / H_2) = 0,98$, $P(A / H_3) = 0,985$. Поскольку все H_i составляют полную группу событий, а событие A может произойти только с наступлением одной из гипотез, то применима формула полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3),$$

т.е. $P(A) = 0,5 \cdot 0,99 + 0,3 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,985 = 0,986 \approx 0,99$.

В этой задаче мог быть поставлен и другой вопрос: найти вероятность того, что взятая наудачу деталь, оказавшаяся стандартной, изготовлена на третьем автомате. Теперь требуется переоценить третью гипотезу, т.е. найти $P(H_3 / A)$:

$$P(H_3 / A) = \frac{P(H_3)P(A / H_3)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,985}{0,986} = 0,199 \approx 0,20.$$

В данном случае первоначальная производительность третьего автомата дана приближенно верно (с точностью до десятых).

Пример 2.12. Кто на экзаменах находится в более выгодном положении: взявший билет первым или вторым? Предполагается, что каждый студент повторил весь материал, но из n имеющихся билетов m содержат более простой материал.

Решение. Применима классическая схема: n – возможностей, m – благоприятных (счастливых) билетов.

Событие A_1 – первый экзаменующийся берет счастливый билет, $P(A_1) = \dfrac{m}{n}$.

Событие A_2 – второй экзаменующийся берет счастливый билет. Для вычисления

$P(A_2)$ введем гипотезы $H_1 = A_1$, $H_2 = \overline{A}_1$, которые образуют полную группу событий. По формуле полной вероятности

$$P(A_2) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A_2 / H_i).$$

Находим $P(H_1) = \frac{m}{n}$; $P(H_2) = \frac{n-m}{n}$; $P(A_2 / H_1) = \frac{m-1}{n-1}$; $P(A_2 / H_2) = \frac{m}{n-1}$. Тогда

$$P(A_2) = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{m}{n-1} = \frac{m}{n} = P(A_1).$$

Отсюда следует, что любой экзаменующийся берет счастливый билет с одной и той же вероятностью.

Примеры для самостоятельного решения

1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь из первого набора стандартна, равна 0,8, а из второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартна. *Ответ.* 0,85.

2. При отклонении от нормы режима работы автомата срабатывает сигнализатор C_1 с вероятностью 0,8, а C_2 с вероятностью 1. Вероятность того, что автомат снабжен сигнализатором C_1, равна 0,6, а C_2 - 0,4. Получен сигнал о разладке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором C_1 или C_2?

Ответ: Вероятнее, что автомат снабжен сигнализатором C_1.

2.5. Повторные испытания

Пусть в неизменных условиях n раз производятся испытания, в каждом из которых событие A может наступить или не наступить.

Если испытания независимы и вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна ($P(A) = p$), то говорят, что испытания проводят по схеме Бернулли.

Поставим перед собой задачу: вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз и, следовательно, не наступит $(n-k)$ раз, т.е. найти $P_n(k)$. Обозначим вероятность ненаступления события A через $q = 1 - p$. Тогда $P_n(0) = P(\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A}) = q^n$,

$$P_n(1) = P(A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A} + \ldots + \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A}A) = n\,p^1 q^{n-1} = C_n^1 p^1 q^{n-1},$$

т.к. события-слагаемые несовместны, а таких слагаемых n штук;

$$P_n(2) = P(A \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{A} \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A} + \ldots) = C_n^2 p^2 q^{n-2},$$

т.к. вероятность того, что событие A наступит 2 раза и не наступит $(n-2)$ раза, по теореме умножения вероятностей независимых событий, равна $p^2 q^{n-2}$, причем таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по 2 элемента, т.е. C_n^2; поскольку эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных событий.

Аналогично получим, что $P_n(3) = C_n^3 p^3 q^{n-3}$, $P_n(4) = C_n^4 p^4 q^{n-4}, \ldots$.

Таким образом, вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит

ровно k раз вычисляется по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют ***формулой Бернулли.***

Пример 2.13. Какова вероятность выиграть три партии из четырех у равносильного противника?

Решение. Отметим, что $p = q = \frac{1}{2}$; $P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!2^4} = \frac{1}{4}$.

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n трудно. В этом случае применяется ***локальная теорема Лапласа*:** если вероятность p появления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(приближенное равенство тем точнее, чем больше n).

Из определения следует, что $\varphi(x)$ − четная функция. Максимальное значение этой функции равно $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ при $x = 0$, точки перегиба $x = \pm 1$, прямая $y = 0$ − горизонтальная асимптота, так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$. График функции $\varphi(x)$ изображен на рис.7.

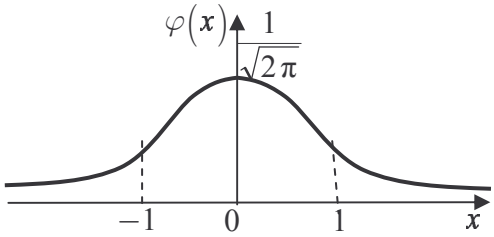

Рис. 7

Имеются таблицы, в которых помещены значения четной функции $\varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ (см. прил.1). Значения функции $\varphi(x)$ приведены лишь для $x \le 3{,}99 \simeq 4$. При $x \ge 4$ значения функции $\varphi(x)$ принимаются равными нулю (рис.7).

Пример 2.14. Вероятность быть отчисленным из института для каждого студента равна 0,005. Всего в институте обучается 10000 студентов. Какова вероятность, что наудачу выбранные 40 студентов будут отчислены?

Ясно, что точный ответ мы получили бы по формуле Бернулли: $P_{10000}(40) = C_{10000}^{40} \cdot 0{,}005^{40} \cdot 0{,}995^{9960}$, но поскольку этот подсчет очень велик, идем на приближенные вычисления, применяя локальную теорему Лапласа:

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \cdot \varphi\left(\frac{40 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \varphi\left(\frac{-10}{7{,}05}\right) \approx 0{,}192 \cdot \varphi(1{,}02) = 0{,}02.$$

Если же n − велико, p − мало, то мы имеем дело с редкими событиями; та же вероятность $P_n(k)$ вычисляется приближенно по ***формуле Пуассона:***

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = n \cdot p.$$

Эти значения $P_n(k)$ приведены в таблицах, для применения которых надо лишь вычислить λ и знать k. Формула Пуассона получается из формулы Бернулли при $n \to \infty$:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Сократив на $(n-k)!$, получим

$$P_n(k) = \frac{(n-k+1)(n-k+2)...n}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k \cdot (n-k+1)\cdot(n-k+2)...n}{k!\,n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}...\frac{n}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

При $n \to \infty$ каждая из дробей $\frac{n-k+1}{n}, \frac{n-k+2}{n},...,\frac{n}{n}$ стремится к 1, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ (по второму замечательному пределу), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$.

В результате получим формулу Пуассона $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.

Пример 2.15. Вероятность того, что в партии из 100 изделий есть одно бракованное, равна 0,02. Найти вероятность того, что в этой партии менее двух бракованных изделий (событие A).

Решение. Событие A: в партии − менее двух бракованных изделий, т.е. в партии или вообще нет бракованных изделий (событие B), или одно бракованное изделие (событие C).

Поскольку события B и C несовместны, то $P(A) = P(B) + P(C)$. Для событий B и C имеем: $n \cdot p = 100 \cdot 0,02 = 2$. По таблице находим $P(B) = P_{100}(0) = 0,135$ и $P(C) = P_{100}(1) = 0,271$. Тогда $P(A) = 0,135 + 0,271 = 0,406$.

Рассмотрим, как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n независимых испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз.

На этот вопрос отвечает ***интегральная теорема Лапласа***:
если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

При вычислениях с помощью интегральной теоремы Лапласа следует использовать специальные таблицы значений функции Лапласа $\Phi(x)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Можно показать, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. функция Лапласа − нечетная; точка $x = 0$ − точка перегиба. При $x \to \infty$

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

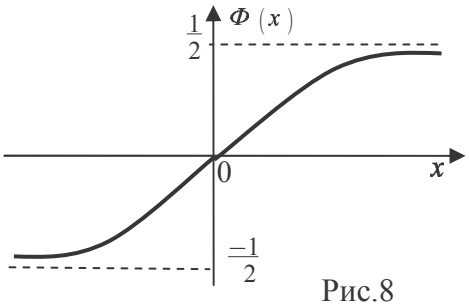

Рис.8

(при вычислении интеграла воспользовались интегралом Пуассона). График функции $\Phi(x)$ изображен на рис.8.

Т.к. $\Phi(x)$ − быстро возрастающая функция, то в таблицах приведены значения $\Phi(x)$ для $0 \le x \le 5$. Для $x > 5$ полагают $\Phi(x) = \frac{1}{2}$.

Пример 2.16. Вероятность того, что деталь не прошла проверку отдела технического контроля, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi\left(\frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right),$$

т.е. $P_{400}(70,100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вероятность того, что расход электроэнергии в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Ответ: 0,30.

2. Вероятность изготовления стандартной детали на автомате равна 0,95. Изготовлена партия в 300 деталей. Найти вероятность того, что в этой партии 10 бракованных деталей. *Ответ:* 0,045.

3. Вероятность выхода из строя за время *T* одного прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что за время *T* из 100 приборов выйдут из строя не менее 20 приборов. *Ответ:* 0,5.

4. Вероятность любому абоненту позвонить в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента? *Ответ:* 0,17.

3. Случайные величины

3.1. Понятие случайной величины

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Определение. Величина называется ***случайной***, если в результате испытания она принимает то или иное числовое значение, причем тот факт, что она принимает определенное значение, является случайным событием.

Условимся случайные величины (с.в.) обозначать латинскими буквами $X, Y, Z, \ldots$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ или коротко $x, y, z, \ldots$.

Примеры случайных величин:

1. X – число попаданий при трех выстрелах.
Возможные значения: $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ или $x : 0,1,2,3.$

2. Y – число вызовов, поступивших на телефонную станцию за сутки.
Возможные значения $y : 0,1,2,3,\ldots,n$.

3. Z – дальность полета снаряда орудия.
Возможные значения $z \in [0, a]$, где a – максимальная дальность полета.

4. X – время безотказной работы радиолампы. Возможные значения $x \in [0, \infty)$; $x = 0$ соответствует событию – радиолампа бракованная.

В первых двух примерах возможные значения случайной величины – множество изолированных точек. Такого типа случайные величины называют дискретными. В третьем и четвертом примерах возможные значения случайной величины заполняют некоторый числовой промежуток. Такие случайные величины называют непрерывными.

Определение. Величина X называется дискретной случайной величиной, если все ее возможные числовые значения образуют конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, и появление каждого из них есть случайное событие с определенной вероятностью.

Определение непрерывной случайной величины будет дано позже.

Законом распределения случайной величины называют любое правило, которое устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Рассмотрим различные формы закона распределения случайной величины: ряд распределения, функцию распределения и плотность вероятности.

3.2. Ряд распределения дискретной случайной величины

Рассмотрим дискретную случайную величину X с возможными значениями $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$; значения выписываются, как правило, в порядке возрастания, причем $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Обозначим через p_i вероятность случайного события, состоящего в том, что случайная величина X приняла определенное значение x_i, т.е. $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Так как несовместные события $X = x_1$, $X = x_2, ..., X = x_n$ образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями можно задать таблицей

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Такую таблицу называют ***рядом распределения*** дискретной случайной величины.

Если значения случайной величины образуют бесконечное (счетное) множество, то ряд, составленный из соответствующих вероятностей, сходится к единице, т.е. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Ряд распределения можно изобразить графически. Для этого по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие вероятности. Полученные точки соединяют отрезками прямых; построенную фигуру называют ***многоугольником распределения*** (см. рис. 9).

Иногда удобна так называемая “механическая” интерпретация ряда распределения. Допустим, что некоторая масса, равная единице, распределена по оси абсцисс так, что в n отдельных точках $x_1, x_2, ..., x_n$ сосредоточены соответственно массы $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогда ряд распределения можно интерпретировать как систему материальных точек с соответствующими массами, расположенных на оси абсцисс.

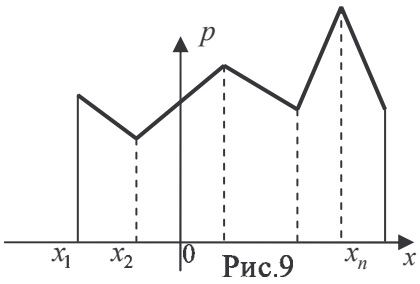

Рис.9

Пример 3.1. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлены три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 1,5 минут, желтый – в течение 0,3 минут, красный – в течение 1,2 мин. Написать закон распределения числа остановок автомобиля на этой улице.

Решение. Пусть случайная величина X – число остановок автомобиля на данной улице. Очевидно, что случайная величина X может принимать значения $x_0 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ x_3 = 3$. Так как время, в течение которого светофор разрешает проезд (зеленый свет), равно времени, в течение которого проезд запрещен (желтый и красный свет), то вероятность того, что светофор задержит или пропустит машину, одна и та же и равна 0,5. Вероятность $p_i = P(X = x_i)$ того, что число остановок будет равно данному частному значению, вычисляется следующим образом:

$$p_0 = q^3 = 0{,}5^3 = 0{,}125; \qquad p_2 = C_3^2 p^2 q = 3p^3 q = 3 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}375;$$

$$p_1 = C_3^1 pq^2 = 3pq^2 = 3 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}375; \qquad p_3 = p^3 = 0{,}5^3 = 0{,}125.$$

Запишем ряд распределения:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Проверка: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}25 + 0{,}75 = 1$.

3.3. Действия над дискретными случайными величинами

Определение. Суммой двух дискретных случайных величин X и Y называют случайную величину $Z = X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого значения случайной величины X с каждым значением случайной величины Y. Вероятности возможных значений случайной величины Z равны произведениям вероятностей слагаемых.

Пример 3.2. Заданы распределения случайных величин X и Y. Найти ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$.

X	-1	0	2
P	0,2	0,5	0,3

Y	1	3	4
P	0,1	0,4	0,5

Решение

$X+Y$	-1+1 0	-1+3 2	-1+4 3	0+1 1	0+3 3	0+4 4	2+1 3	2+3 5	2+4 6
P	0,2 0,1 0,02	0,2 0,4 0,08	$0,2\cdot 0,5$ 0,1	$0,5\cdot 0,1$ 0,05	$0,5\cdot 0,4$ 0,2	$0,5\cdot 0,5$ 0,25	$0,3\cdot 0,1$ 0,03	$0,3\cdot 0,4$ 0,12	$0,3\cdot 0,5$ 0,15

Объединим равные значения случайной величины $X+Y$, расположим их возможные значения в порядке возрастания. Получим ряд распределения случайной величины Z.

Z	0	1	2	3	4	5	6
P	0,02	0,05	0,08	0,33	0,25	0,12	0,15

Проверка: $\sum_{i=1}^{7} p_i = 0,02+0,05+0,08+0,33+0,25+0,12+0,15=1$

Определение. Произведением независимых случайных величин X и Y называют случайную величину $Z=X\cdot Y$, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения случайной величины X с каждым возможным значением случайной величины Y. Вероятности возможных значений случайной величины Z равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

Две дискретные случайные величины X и Y называются независимыми, если независима каждая пара случайных событий $(X=x_i)$ и $(Y=y_i)$.

Пример 3.3. Составить закон распределения случайной величины $Z=X\cdot Y$, если заданы законы распределения независимых случайных величин X и Y (см. пример 3.2).

Решение.

$X\cdot Y$	$-1\cdot 1$ -1	$-1\cdot 3$ -3	$-1\cdot 4$ -4	$0\cdot 1$ 0	$0\cdot 3$ 0	$0\cdot 4$ 0	$2\cdot 1$ 2	$2\cdot 3$ 6	$2\cdot 4$ 8
P	0,02	0,08	0,1	0,05	0,2	0,25	0,03	0,12	0,15

Запишем ряд распределения случайной величины Z.

Z	-4	-3	-1	0	2	6	8
P	0,1	0,08	0,02	0,50	0,03	0,12	0,15

Проверка: $\sum_{i=1}^{7} p_i = 0,1+0,02+0,08+0,5+0,03+0,12+0,15=1.$

Функция от дискретной случайной величины

Пусть $y=f(x)$ – некоторая заданная функция, а X – дискретная случайная величина, определяемая рядом распределения.

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Если $f(x)$ – монотонная функция, то дискретная случайная величина $Z=f(x)$ определяется рядом распределения.

Z	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Если $f(x)$ – не является монотонной функцией, тогда возможно, что она принимает одинаковые значения при различных значениях аргумента. В этом случае равные значения объединяются, их вероятности складываются (см. примеры 3.2, 3.3, приведенные раньше).

3.4. Функция распределения случайной величины

Пусть X – дискретная случайная величина любого типа, непрерывная или дискретная. На рис.10 построена ось возможных значений случайной величины X и на ней взята произвольная точка x.

Рассмотрим событие, состоящее в том, что случайная величина X принимает значения, меньшие выбранного x: $X < x$.

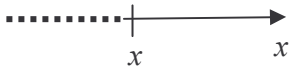

Рис.10

Определение. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называют вероятность события $X < x$, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция $F(x)$ определена на всей числовой оси. Ее называют еще интегральной функцией распределения.

Геометрически событие $X < x$ выражает тот факт, что рассматриваются значения случайной величины, расположенные левее выбранной точки. Для дискретной случайной величины

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Справедливость неравенства вытекает из определения функции распределения как вероятности.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ или $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$.

Действительно, если $x \to -\infty$, то событие $X < x$ становится невозможным, а при $x \to +\infty$ – достоверным.

Если значения случайной величины X принадлежат отрезку $[a, b]$, то для $x \le a$ событие $X < x$ – невозможное, а при $x > b$ – достоверное, поэтому $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x > b$.

3. Функция $F(x)$ – неубывающая.

Для обоснования указанного свойства отметим, что с ростом x вероятность события $X < x$ может либо сохранить свое значение, либо увеличиться.

4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Для доказательства событие $X < b$ представим в виде суммы двух несовместных событий: $(X < b) = (X < a) + (a \le X < b)$. Тогда

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b),$$

откуда и следует равенство, т.к. $P(X < a) = F(a)$, $P(X < b) = F(b)$.

Пример 3.4. Найти функцию распределения случайной величины X – числа остановок автомобиля на данной улице (см. пример 3.1) и построить ее график.

Решение. Ряд распределения нам известен.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Функция $F(x)=0$ при $x \le 0$, $F(x)=1$ при $x>3$ по второму свойству функции распределения.

Если $0<x\le 1$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0{,}125$. Если $1<x\le 2$, то $F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}5$. Аналогично, если $2<x\le 3$, то $F(x)=0{,}875$.

Окончательно, $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 0{,}125, & 0<x\le 1, \\ 0{,}500, & 1<x\le 2, \\ 0{,}875, & 2<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$

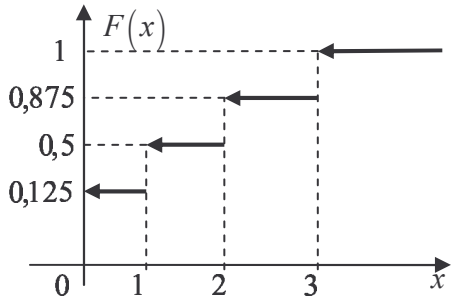

Рис.11

График функции $F(x)$ представлен на рис.11. Отметим, что для любой дискретной случайной величины функция распределения является кусочно-постоянной. Ее разрывы (скачки) наблюдаются в точках возможных значений случайной величины. Величина каждого скачка равна соответствующей вероятности.

3.5. Плотность вероятности непрерывной случайной величины

Понятие плотности вероятности вводится для непрерывной случайной величины.

Определение 1. Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема.

Определение 2. Функцию $F'(x)=f(x)$ называют ***плотностью вероятности*** или дифференциальной функцией распределения.

Ясно, что функция $F(x)$ является первообразной для плотности вероятности $f(x)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Пусть в последнем равенстве $a\to-\infty$, $b=x$. Учитывая, что $F(-\infty)=0$ (см. свойство 2 функции $F(x)$), имеем $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Эта формула дает возможность находить по заданной плотности вероятности функцию распределения.

Свойства плотности вероятности

1. $f(x)\ge 0$.

Действительно, т.к. $F(x)$ – неубывающая функция, то $f(x)=F'(x)\ge 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Для доказательства достаточно в формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ устремить $x\to+\infty$ и учесть, что $F(+\infty)=1$.

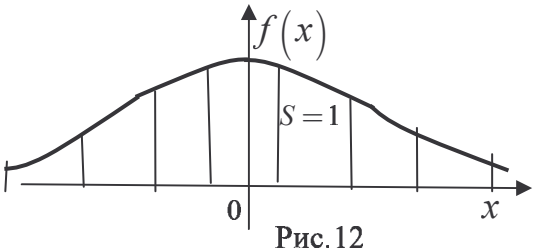

Рис.12

График функции $f(x)$ называют ***кривой вероятностей*** или ***линией распределения.*** Кривая вероятностей некоторой случайной величины показана на рис.12. Из указанных свойств следует, что она располагается над осью OX и площадь заштрихованной области равна единице.

3. Для непрерывной случайной величины вероятность принять конкретное значение равна нулю.

Действительно, $P(a\le X<b)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a)$. Положим $a=b$, откуда $P(X=a)=0$. Здесь событие $X=a$ возможное, но его вероятность равна нулю.

На практике при изготовлении деталей требование совпадения фактического размера деталей с заданным равносильно осуществлению события: непрерывная случайная величина принимает определенное значение. Именно поэтому при производстве деталей дается некоторый допуск на каждый размер, а не предусматривается совпадение получаемого размера изготовляемых деталей с планируемым.

Замечания:

1. Для непрерывной случайной величины в силу равенства $P(X=a)=0$ вероятность попадания значений с.в. на полуинтервал, интервал, отрезок одна и та же:

$$P(a\le X<b)=P(a<X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b).$$

2. $F(x\le X\le x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)\cong F'(x)dx=f(x)dx$; выражение $f(x)dx$ называют элементом вероятности.

Пример 3.5. Дана функция распределения непрерывной случайной величины.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ a-b\cos x, & 0\le x\le\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Найти: а) параметры $a,\ b$; б) плотность вероятности $f(x)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

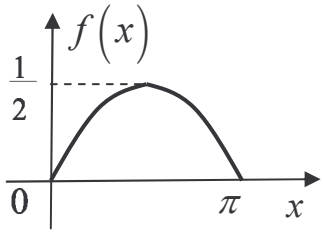

Рис.13

Решение: а) при отыскании параметров можно использовать непрерывность функции распределения для непрерывной случайной величины. В частности, в точке $x=0$ имеем $F(0)=F(+0)=F(-0)$, т.е. значение функции в точке непрерывности равно пределам функции слева и справа. Отсюда

$\left.\begin{aligned} F(0)&=a-b=0\\ F(\pi)&=a+b=1\end{aligned}\right\}$. Решая систему, находим $a=b=0{,}5$;

б) по определению $f(x)=F'(x)$, поэтому $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\ x>\pi;\\ 0{,}5\sin x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ построены на рис. 13 и 14.

Пример 3.6. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{c}{x^2}, & x>1. \end{cases}$

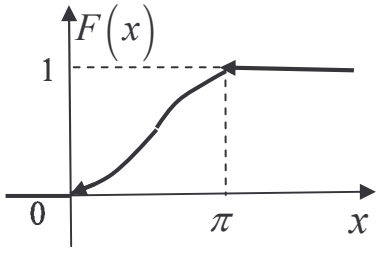

Рис.14

Найти: а) коэффициент c и построить линию распределения; б) функцию распределения и построить ее график; в) вероятность попадания значений с.в. в интервал $(2, 3)$;

Решение: а) для отыскания коэффициента c воспользуемся свойствами плотности вероятности: 1. $f(x)\ge 0$, откуда $c\ge 0$; 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 = \int\limits_{1}^{\infty}\frac{c}{x^2}dx = -\frac{c}{x}\Big|_1^{\infty} = c$.

Следовательно, $c=1$. На рис.15 построена линия распределения заданной случайной величины X;

б) если $x<1$, то $F(x)=0$.

Если $x>1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{x}\frac{dx}{x^2} = \frac{x-1}{x}$.

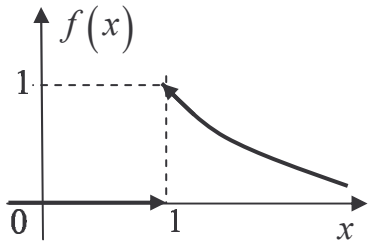

Рис.15

Промежуток интегрирования $(-\infty, x)$ разделен на части так, чтобы на каждом из них функция $f(x)$ была задана одной формулой. Окончательно,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x-1}{x}, & x>1. \end{cases}.$$

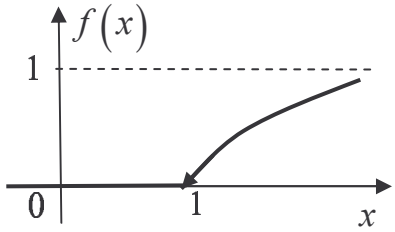

Рис.16

На рис. 16 построен график функции распределения;

в) вероятность попадания значений непрерывной случайной величины, на интервал $(2, 3)$ равна:

$$P(2<X<3)=F(3)-F(2)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X

X	1	3	5	7
P	0,2	0,3	0,1	0,4

Найти функцию распределения $F(X)$, построить ее график. Вычислить:

а) $F(3)$, б) вероятность того, что случайная величина X примет значения из промежутка $(0, 3)$. Построить многоугольник распределения.

2. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ c\cdot \operatorname{arctg} x, & 0<x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Найти: плотность вероятности $f(x)$; параметр c; вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение из интервала $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$.

3. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \\ \cos x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

Найти: функцию распределения $F(x)$; вероятность того, что в результате испытания случайная величина принимает значения, заключенные в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Ответы.

1. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,2, & 1 < x \le 3, \\ 0,5, & 3 < x \le 5, \\ 0,6, & 5 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$ $F(3)=0,2;\ P(0<X<3)=0,2.$

2. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin (0,1); \\ \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & x \in (0,1), \end{cases}$ $c=\frac{4}{\pi},\ P\left(\sqrt{3}/3 < X < 1\right)=1/3.$

3. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$ $P(-\pi/2 < X < \pi/6)=0,5.$

4. Числовые характеристики случайных величин

Итак, мы познакомились с законами распределения, которые наиболее полно характеризуют случайные величины. Для дискретной случайной величины – это ряд распределения, функция распределения, для непрерывной случайной величины – это функция распределения, плотность вероятности.

Каждый закон распределения представляет собой некоторую ***функцию***, и указание этой функции полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения.

Во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Достаточно бывает указать отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты распределения случайной величины: какое-либо среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины, какое-либо число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего и др. Такие характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называют ***числовыми характеристиками*** случайной величины. Мы познакомимся с некоторыми из них.

4.1. Математическое ожидание случайной величины и его свойства

4.1.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть X – дискретная случайная величина с известным рядом распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Определение. Математическим ожиданием $M[X]$ (*или* m_x) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности.

Таким образом, $M[X]=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Если случайная величина принимает счетное множество значений, то $M[X]=\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ – ряд. Мы будем рассматривать только те случайные величины X, для которых этот ряд сходится абсолютно.

Если использовать "механическую" интерпретацию ряда распределения как систему материальных точек (x_i, p_i) на оси абсцисс, то математическое ожидание случайной величины X есть абсцисса центра тяжести x_c этой системы материальных точек. Действительно, $x_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M[X]$.

Рассмотрим еще одну интерпретацию математического ожидания дискретной случайной величины. Пусть случайная величина X возможное значение x_1 принимает m_1 раз, значение x_2 принимает m_2 раз,..., значение x_k принимает m_k раз, причем $m_1+m_2+...+m_k=n$. Тогда среднее арифметическое $\overline{X}$ возможных значений случайной величины X равно

$$\overline{X}=\frac{x_1\cdot m_1+x_2\cdot m_2+...+x_k\cdot m_k}{n}=x_1\frac{m_1}{n}+x_2\frac{m_2}{n}+...+x_k\frac{m_k}{n}=\sum_{i=1}^{k} x_i\frac{m_i}{n}=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i = M[X],$$

где p_i – статистическая вероятность появления возможного значения x_i.

Итак, математическое ожидание есть среднее возможных значений случайной величины.

4.1.2. Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f(x)$. В этом случае в формуле математического ожидания дискретной случайной величины знак суммы заменяют интегралом; конкретные значения случайной величины x_i — непрерывно изменяющейся переменной x, а p_i – элементом вероятности $f(x)dx$. В результате получим формулу

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx,$$

которая определяет математическое ожидание непрерывной случайной величины.

Очевидно, что имеет смысл говорить о математическом ожидании непрерывной случайной величины, если интеграл сходится. Из определения $M[X]$ следует, что размерность математического ожидания совпадает с размерностью изучаемой случайной величины.

Свойства математического ожидания

1. $M[C]=C$, где $C=\text{const}$.

2. $M[CX]=C\cdot M[X]$, где $C=\text{const}$.

3. $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$ для любых случайных величин X и Y.

4. $M[XY]=M[X]\cdot M[Y]$, если X и Y независимые случайные величины.

Свойства 1; 2 предлагается доказать самостоятельно, свойства 3; 4 – без доказательства. Из свойства 3 следует

а) $M[X\pm C]=M[X]\pm C$, где $C=\text{const}$,

б) $M\left[X-M[X]\right]=0$,

т.е. математическое ожидание отклонения случайной величины от своего математического ожидания равно 0. Действительно,

$$M\left[X-M[X]\right]=M[X]-M\left[M[X]\right]=M[X]-M[X]=0.$$

Определение. Центрированной случайной величиной $\overset{0}{X}$ соответствующей случайной величины X называется отклонение случайной величины от своего математического ожидания: $\overset{0}{X}=X-M[X]$.

Очевидно, что $M\left[\overset{0}{X}\right]=0$.

Замечание. Так как $M[X]=\bar{X}$, то свойства среднего арифметического случайной величины совпадают со свойствами математического ожидания.

4.2. Дисперсия и ее свойства

Во многих случаях даже для самого краткого описания случайной величины недостаточно указать ее центр распределения, т.е. ее математическое ожидание. Например, для распределений двух случайных величин X и Y

X	-0,1	0,2
P	2/3	1/3

Y	-100	100
P	1/2	½

имеем $M[X]=-0{,}1\cdot\frac{2}{3}+0{,}2\cdot\frac{1}{3}=0$, $M[Y]=-\frac{100}{2}+\frac{100}{2}=0$

Случайные величины X и Y имеют равные математические ожидания, но значения случайной величины X мало отклоняются от своего центра, а значения случайной величины Y имеют довольно большие отклонения. Аналогичная картина появляется при наблюдении за значениями измерительного прибора при потере им точности: разброс значений увеличивается, хотя центр распределения может не измениться.

Чтобы знать, как тесно группируются значения каждой случайной величины около своего центра, вводится понятие дисперсии.

Определение. Дисперсией $D[X]$ (рассеиванием) случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания. Другими словами, дисперсия − это математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины.

Итак, по определению,

$$D[X]=M\left[\left(X-M[X]\right)^2\right]=M\left[\overset{0}{X^2}\right].$$

Для дискретной случайной величины

$$D[X]=\sum_i\left(x_i-M[X]\right)^2 p_i$$

Для непрерывной случайной величины

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M[X]\right)^2 f(x)\,dx.$$

Из определения дисперсии следует: 1) $D[X]\geq 0$; 2) $D[X]$ имеет размерность квадрата размерности случайной величины X. Поэтому наряду с дисперсией пользуются средним квадратическим (стандартным) отклонением $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$, которое имеет размерность случайной величины X.

При вычислении дисперсии полезна формула $D[X]=M\left[X^2\right]-M^2[X]$, устанавливающая, что дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой случайной величины без квадрата ее математического ожидания. Действительно, по определению

$$D[X]=M\left[\left(X-M[X]\right)^2\right]=M\left[X^2-2X\cdot M[X]+M^2[X]\right].$$

Используя свойства математического ожидания, получим

$$D[X]=M\left[X^2\right]-2M[X]\cdot M[X]+M^2[X]=M\left[X^2\right]-M^2[X].$$

Формула доказана.

Свойства дисперсии и среднего квадратичного отклонения

1. $D[C]=0$, $\sigma[C]=0$, где $C=\text{const}$.

2. $D[CX]=C^2\cdot D[X]$, $\sigma[CX]=|C|\cdot\sigma[X]$, где $C=\text{const}$.

3. $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$, $\sigma[X+Y]=\sqrt{\sigma^2[X]+\sigma^2[Y]}$, если X и Y независимые случайные величины.

Следствия:

а) $D[-X]=D[X]$;

б) $D[X-Y]=D[X]+D[Y]$, если X и Y независимые случайные величины.

в) $D[X\pm C]=D[X]$, где $C=\text{const}$.

Используя формулу для вычисления дисперсии, легко доказать свойства 1, 2.

Докажем свойство 3. Пусть $m_x=M[X]$, $m_y=M[Y]$, $M[X+Y]=m_x+m_y$.

По определению:

$$D[X+Y]=M\left[\left((X+Y)-\left(m_x+m_y\right)\right)^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2+\left(Y-m_y\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(X-m_x\right)^2+2\left(X-m_x\right)\cdot\left(Y-m_y\right)+\left(Y-m_y\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]+2M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]+M\left[\left(Y-m_y\right)^2\right].$$

Если X и Y независимые случайные величины, то $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$.

Тогда $M\left[(X-m_x)\cdot(Y-m_y)\right]=M[X-m_x]\cdot M\left[Y-m_y\right]=0$, т.к. каждый из множителей равен нулю. Получим

$$D[X+Y]=M\left[(X-m_x)^2\right]+M\left[(Y-m_y)^2\right]=D[X]+D[Y],$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Иногда наряду со случайной величиной X рассматривают случайную величину $X'=\frac{X-C}{h}$, значения которой $x_i'=\frac{x_i-C}{h}$ называют условными вариантами, а число C ложным нулем. Удачным выбором C и h можно значительно упростить вычисление $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$. Используя свойства $M[X]$ и $D[X]$, запишем формулу для их вычисления через условные варианты:

$$M[X]=h\cdot M\left[\frac{X-C}{h}\right]+C \quad \text{или} \quad M[X]=h\cdot M[X']+C,$$

$$D[X]=h^2\cdot D\left[\frac{X-C}{h}\right] \quad \text{или} \quad D[X]=h^2\cdot D[X'].$$

Определение. Случайная величина $T=\frac{X-m_x}{\sigma}$, где $m_x=M[X]$, $\sigma=\sqrt{D[X]}$, называется нормированной.

Отметим, что $M[T]=\frac{1}{\sigma}M[X-m_x]=0$, $D[T]=\frac{1}{\sigma^2}D[X-m_x]=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$

Пример 4.1. Найти $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$ по заданному ряду распределения

X	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
P	0,03	0,03	0,06	0,15	0,25	0,30	0,08	0,05	0,03	0,02

Решение. Расчет можно сделать непосредственно по формулам вычисления $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$ для дискретных случайных величин, учтя, что $\sigma=\sqrt{D[X]}$.

Для упрощения счета воспользуемся условными вариантами, положив $C=55$ (возможное значение случайной величины X с наибольшей вероятностью примерно в середине ряда) и $h=5$ $(x_{i+1}-x_i=5)$; $X'=\frac{X-55}{5}$. Вычисления запишем в таблицу.

X	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
P	0,03	0,03	0,06	0,15	0,25	0,30	0,08	0,05	0,03	0,02
X'	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P\cdot X'$	-0,15	-0,12	-0,18	-0,30	-0,25	0	0,08	0,1	0,09	0,08
$(X')^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$P\cdot(X')^2$	0,75	0,48	0,54	0,60	0,25	0	0,08	0,20	0,27	0,32

$$M[X']=-0,15-0,12-0,18-0,30-0,25+0,08+0,1+0,09+0,08=-0,65;$$

$$M[X]=h\cdot M[X']+C=-0,65\cdot 5+55=55-3,25=51,75;$$

$$M\left[(X')^2\right]=0,75+0,48+0,54+0,60+0,25+0,08+0,20+0,27+0,32=3,49;$$

$$D[X'] = M\left[(X')^2\right] - M^2[X'] = 3,49 - (0,65)^2 = 3,49 - 0,4225 = 3,0675\ ;$$

$$D[X] = h^2 \cdot D[X'] = 25 \cdot 3,0675 = 76,6875 = 76,69\ ;$$

$$\sigma[X] = \sqrt{76,69} = 8,758 = 8,76\ .$$

4.3. Моменты

Понятие момента широко используется в механике для описания распределения масс (статические моменты, моменты инерции и прочее). Теми же приемами пользуются в теории вероятностей для описания основных свойств распределения случайной величины.

На практике чаще всего применяются моменты двух видов: начальные и центральные.

Определение. *Начальным моментом* *к*-го порядка случайной величины X называют математическое ожидание *к*-й степени случайной величины.

Для дискретной случайной величины $\nu_k[X] = M[X^k] = \sum_i p_i x_i^k;\ k = 0,1,2,\ldots$.

Для непрерывной случайной величины $\nu_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx;\ \ k = 0,1,2,..$

Очевидно, что математическое ожидание случайной величины X есть начальный момент первого порядка, т.е. $\nu_1[X] = M[X]$.

Определение. *Центральным моментом к-го порядка* случайной величины X называют начальный момент *к*-го порядка центрированной случайной величины $\overset{0}{X}$, т.е. $\mu_k[X] = M[\overset{0}{X}{}^k] = M[(X - M[X])^k],\ k = 0,1,2,\ldots$

Очевидно, что $\mu_2[X] = M[(X - M[X])^2] = D[X]$, т.е. дисперсия случайной величины X есть центральный момент второго порядка случайной величины X.

На практике пользуются центральными моментами не выше 4-го порядка.

Третий центральный момент μ_3 является характеристикой симметрии распределения. Чтобы иметь дело с безразмерной характеристикой, вводят коэффициент ***асимметрии*** $A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, где $\sigma = \sigma[X]$.

Если кривая распределения симметрична относительно математического ожидания, то $A_S = 0$. Если кривая распределения асимметрична относительно математического ожидания, то говорят о положительной (правой) асимметрии $(A_S > 0)$ и об отрицательной (левой) асимметрии $(A_S < 0)$. Виды распределений изображены на рис.17,а, 17,б.

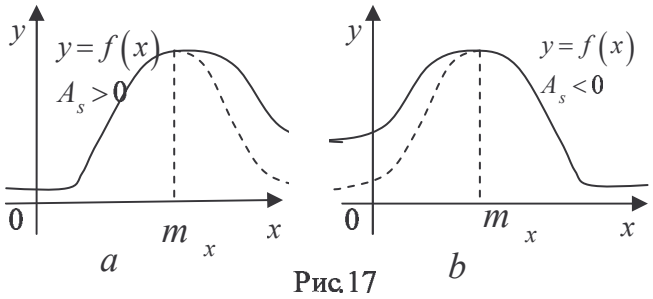

Рис.17

Четвертый центральный момент является характеристикой так называемой “крутости”, т.е. островершинности или плосковершинности распределения случайной величины.

Эксцессом случайной величины X называют величину $E[X]=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$.

Число 3 вычитается из отношения μ_4/σ^4, потому что для весьма важного и распространенного в природе нормального закона распределения (с которым мы подробно познакомимся позже) $\frac{\mu_4}{\sigma^4}=3$.

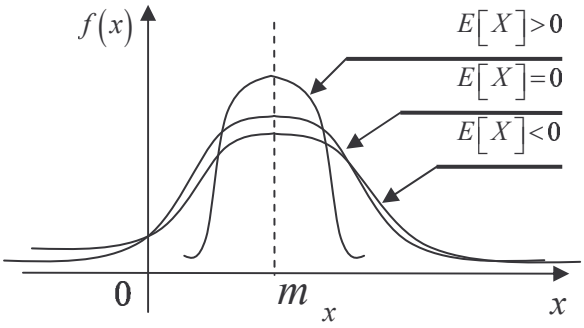

Рис.18

Таким образом, для нормального распределения $E[X]=0$; для кривых, более островершинных, чем кривая распределения нормального закона, $E[X]>0$; для более плосковершинных $E[X]<0$. Виды распределений изображены на рис.18.

Между начальными и центральными моментами существует связь:

$$\mu_1=0,\qquad \mu_2=\nu_2-\nu_1^2,\qquad \mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3,$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4,\quad \nu_1=M[X].$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на “отлично”, наугад извлекают 3 работы С.в. X –число оцененных на “отлично” работ среди извлеченных. Составить закон распределения с.в. X, вычислить математическое ожидание с.в. X.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	57/115	19/46	2/23	1/230

, $M[X]$=138/230

2. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго 0,8, для третьего 0,9. С.в. X – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа. Составить закон распределения с.в. X, вычислить математическое ожидание и дисперсию с.в. X.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	0,504	0,092	0,398	0,006

$M[X]$=0,600; $D[X]$=0,46.

3. Непрерывная с.в. X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$

Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

Ответ: $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(2,3);\\ 2(x-2), & x\in(2,3).\end{cases}$ $M[X]=8/3,$ $D[X]=1/18.$

5. Некоторые законы распределения и их числовые характеристики

5.1. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение – один из важнейших законов распределения дискретной случайной величины.

Пусть случайная величина $X = m -$ число (частота) появлений события A в серии из n независимых испытаний , $p = P(A)$ –вероятность появления события A в каждом испытании, $q = P\left(\overline{A}\right) = 1 - p$. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Ряд распределения имеет вид:

X	0	1	2	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Покажем, что сумма всех вероятностей равна 1:

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$$

(использован бином Ньютона).

Для отыскания числовых характеристик вводят новую случайную величину X_i − частоту появления события A в i-м (одном) испытании, $i=1,2,..,n$. Она может принимать два значения: $X_i = 0$, если событие в данном опыте не наступило; $X_i = 1$ − в противном случае. Ряд распределения случайной величины X_i

X_i	0	1
P	q	p

, $M[X_i]=p$.

Ряд распределения случайной величины X_i^2 совпадает с рядом распределения случайной величины X_i т.к. $P\left(X_i^2 = 0\right) = P\left(X_i = 0\right)$ и т.д., поэтому

$$M\left[X_i^2\right] = p \text{ и } D\left[X_i\right] = M\left[X_i^2\right] - M\left[X_i\right]^2 = p - p^2 = pq.$$

Случайная величина $X = m = X_1 + \ldots + X_n$, причем слагаемые X_i — независимые случайные величины в силу независимости испытаний. Вычислим

$$M[m] = M\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i M[X_i] = n\,p, \quad D[m] = \sum_i D[X_i] = n\,p\,q; \quad \sigma[m] = \sqrt{npq}.$$

Используя выведенные формулы, найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины m/n – относительной частоты

$$M\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{1}{n} M[m] = p, \quad D\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D[m] = \frac{pq}{n}; \quad \sigma\left[\frac{m}{n}\right] = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Число испытаний n − величина не случайная, поэтому последние равенства теоретически подтверждают разумность введения статистического определения вероятности: вероятность − центр распределения относительных частот, которые группируются около вероятности тем гуще, чем больше число испытаний, так как $D\left[\frac{m}{n}\right] \to 0$ при $n \to \infty$.

5.2. Закон Пуассона

Случайную величину X называют распределенной по закону Пуассона, если ее возможные значения $\{0,1,2,\ldots,k,\ldots\}$ и вероятность наступления события $(X=k)$ равна $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где число $\lambda>0$ называют параметром. Равенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$ следует из разложения в ряд $e^{\lambda}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Имеются специальные таблицы, которые дают возможность найти $P(X=k)$ при фиксированных значениях λ и k. Распределение Пуассона можно получить из биноминального следующим образом: будем неограниченно увеличивать число испытаний ($n\to\infty$) при условии, что произведение $n{\cdot}p=\lambda$, т.е. оно сохраняет постоянное значение. Тогда $p=\frac{\lambda}{n}$ и $p\to 0$ при $n\to\infty$.

На основании этого говорят о длинной серии маловероятных событий и ***закон Пуассона*** называют ***законом редких явлений***. Распределение Пуассона возникает в тех случаях, когда имеется однородный поток независимых событий, регистрируемых во времени. Например, поток требований, поступающих на некоторую систему обслуживания. В частности, это может быть поток отказов абонентам на телефонной станции, поток запросов в справочное бюро, поток машин к бензозаправочной станции и т.д.

Пример 5.1. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры (событие A), если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов.

Решение. Пусть X – число отказавших элементов, тогда событие A равносильно событию $X>1$ (очень сложное!). Событие $\overline{A}$ – ни один элемент не выходит из строя; оно равносильно событию $X=0$. Чтобы использовать закон Пуассона, найдем $\lambda=n\,p=1$. Тогда

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{1^0}{0!}e^{-1}=1-\frac{1}{e}\approx 0,63.$$

Можно доказать, что для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, $M[X]=D[X]=\lambda$ (в нашем примере $M[X]=D[X]=1$).

5.3. Равномерный закон распределения

Пусть X – непрерывная случайная величина с возможными значениями $a\le x\le b$. Случайную величину называют равномерно распределенной, еслиплотность вероятности во всех точках отрезка $[a,\,b]$ постоянна (рис.19):

$$f(x)=\begin{cases}c, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Из свойств плотности вероятности имеем:

1. $f(x)\ge 0$, откуда $c\ge 0$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b}c\,dx=1$, откуда

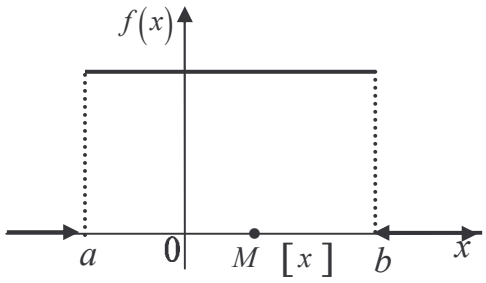

Рис.19

$$(b-a)\cdot c=1,\ \ c=\frac{1}{b-a};\qquad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Найдем числовые характеристики:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}$$ (т.е. $M[X]$ – середина отрезка $[a,\ b]$;

$$D[X]=M[X^2]-[M[X]]^2=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma[X]=\frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Интегральную функцию распределения при $a<x\le b$ находим по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_a^x \frac{dx}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Вне рассматриваемого промежутка $F(x)=0$ при $x\le a$ и $F(x)=1$ при $x>b$. Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

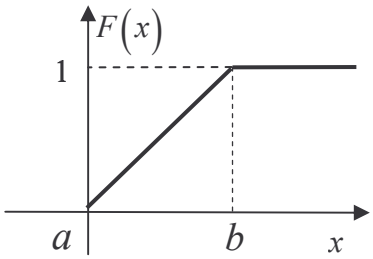

Рис.20

График функции $F(x)$ показан на рис.20; это график непрерывной функции.

Примеры равномерно распределенных случайных величин.

1. В измерительной практике ошибка при округлении результата до ближайшего целого деления – случайная величина, каждое значение которой между двумя соседними делениями прибора имеет постоянную плотность вероятности.

2. Если автобусы идут с определенным интервалом в h минут, то время, в течение которого пассажиру придется ждать автобус, – случайная величина с постоянной плотностью на отрезке $[0,\ h]$.

5.4. Показательный закон распределения

Закон распределения непрерывной случайной величины называется показательным или экспоненциальным, если плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$ где λ – параметр.

При $\lambda>0$ выполняются свойства плотности вероятности (проверить!). На рис.21 построен график функции $f(x)$ при $\lambda=2$.

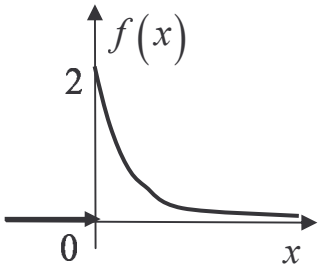

Рис.21

Интегральную функцию распределения находим по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx;\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

Ее график представлен на рис.22.

Можно показать, что для показательного распределения случайной величины X

$$M[X]=\sigma[X]=\frac{1}{\lambda}, \qquad D[X]=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательное распределение используется в теории массового обслуживания и в теории надежности.

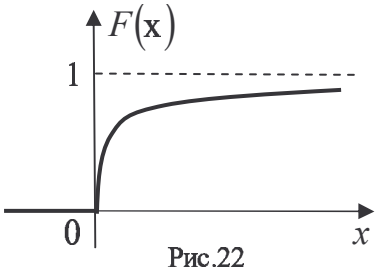

Рис.22

5.5. Нормальный закон распределения (Закон Гаусса)

Среди всех законов распределения нормальный закон имеет большое практическое и теоретическое значение. Основная его особенность в том, что он является предельным, к которому приближаются другие законы при некоторых условиях. В частности, можно показать, что закон Пуассона и биномиальный при $n\to\infty$ приближаются к нормальному закону. Закон Гаусса часто встречается на практике. Приведем примеры случайных величин, имеющих нормальное распределение: ошибки при измерениях; отклонения размеров деталей, обрабатываемых на станке, от номинальных; отклонения при стрельбе по цели и т.д.

Плотность вероятности нормального закона

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где числа a и σ – параметры распределения, $-\infty<x<\infty$.

Убедимся, что при $\sigma>0$ выполняются свойства плотности вероятности.

1. Очевидно, что $f(x)>0$ для всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1$. Действительно,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{c}\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}=t\\ dx=\sigma\sqrt{2}\,dt\end{array}\right|=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\sigma\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=1.$$

Здесь мы воспользовались известным из курса математического анализа интегралом Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

Найдем числовые характеристики нормально распределенной случайной величины

$$M[X]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{c}\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}=t\\ dx=\sigma\sqrt{2}\,dt\end{array}\right|=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\sigma\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a+\sigma\sqrt{2}\cdot t\right)e^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(a\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt+\sigma\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t\cdot e^{-t^2}dt\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(a\sqrt{\pi}+0\right)=a.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2} dt = 0$, так как под знаком интеграла – нечетная функция. Итак, мы получили $M[X] = a$.

Для вычисления дисперсии применяется метод интегрирования по частям и интеграл Пуассона. Проверьте, что

$$D[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 .$$

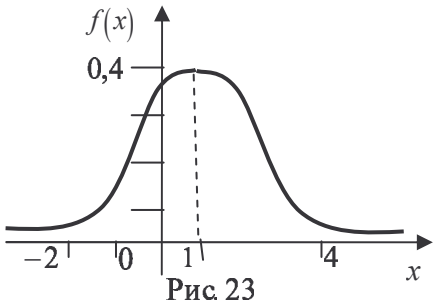

Рис. 23

Выяснен вероятностный смысл параметров:

$a = M[X]$ – центр распределения;

$\sigma = \sqrt{D[X]}$ – среднее квадратичное отклонение.

Эти два параметра полностью определяют нормальный закон распределения.

График функции $f(x)$ – кривая, симметричная относительно прямой $x = a$; точки $x = a \pm \sigma$ соответствуют точкам перегиба кривой, точка $x = a$ – точка максимума, $f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0{,}4}{\sigma}$. Кривая Гаусса $f(x)$ при $a = \sigma = 1$ построена на рис.23.

Перейдем от случайной величины X к нормированной случайной величине $T = \frac{X-a}{\sigma}$ с возможными значениями $t = \frac{x-a}{\sigma}$. Плотность вероятности случайной величины T равна $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ (свойства функции $\varphi(t)$ см. в п. 2.5).

Легко заметить, что $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Функцию распределения $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$ называют нормальной функцией распределения. Сделав в интеграле замену переменной $t = \frac{z-a}{\sigma}$, получим

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt.$$

Первое слагаемое равно ½ (см. интеграл Пуассона), а второе слагаемое есть функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt$ в точке $\frac{x-a}{\sigma}$, поэтому

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

(свойства функции Лапласа см. в п. 2.5).

Общий вид нормальной функции распределения показан на графике 24.

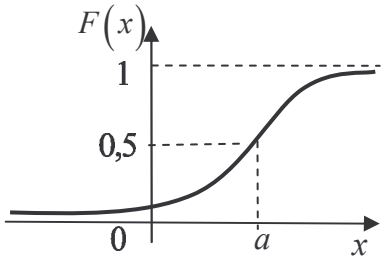

Рис.24

Для нормированной случайной величины $T = \frac{X-a}{\sigma}$ функция распределения

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2}\,dz=\frac{1}{2}+\hat{O}(t).$$

Найдем вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

В частности,

$$P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),\ \text{или}\ P\left(|X-a|<\varepsilon\right)=2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Это равенство называют ***формулой Лапласа.***

Положив в формуле Лапласа $\varepsilon=3\sigma$, получим

$$P\left(|x-a|<3\sigma\right)=2\,\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

Это говорит о том, что отклонение нормальной случайной величины от своего математического ожидания на величину, не превосходящую трех сигм, – практически достоверное событие. Интервал $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$ принимают за интервал практически возможных значений нормальной случайной величины. Указанное свойство называют “***правилом трех сигм***”.

Можно найти центральные моменты случайной величины X, распределенной по нормальному закону, и убедиться, что $\mu_3=0$, $\mu_4=3\sigma^4$. Тогда коэффициент асимметрии $A_s=\mu_3/\sigma^3=0$; этот факт соответствует симметрии графика плотности вероятности относительно прямой $x=a$. Формула для вычисления эксцесса $E=\left(\mu_4/\sigma^4\right)-3$ построена так, что для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, эксцесс равен 0.

Примеры для самостоятельного решения

1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[2,\ 8]$. Записать плотность вероятности $f(x)$, найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$. *Ответ*: $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(2,8);\\ 1/6, & x\in(2,8),\end{cases}$ $M[X]=5,\quad D[X]=3$.

2. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=7,\ \sigma=6$. Записать плотность вероятности $f(x)$, функцию распределения $F(X)$; вычислить $P\left(|X-7|<7\right)$, $P(1<X<15)$.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-7)^2}{72}}$, $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-7}{6}\right)$, $P\left(|X-7|<7\right)=0{,}76$, $P(1<X<15)=0{,}75$.

3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,4. Производится 3 независимых выстрела. Найти закон распределения случайного числа попаданий в цель, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

$M[X]=1{,}2$;

$D[X]=0{,}72$.

6. Закон больших чисел

Нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в ходе испытания. Казалось бы, вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Эти условия указываются в теоремах, носящих общее название “Закон больших чисел”: лемма, неравенство, теорема Чебышева, теорема Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа, центральная предельная теорема Ляпунова. Поскольку большинство теорем данного цикла носят больше теоретический характер, мы приводим их без доказательства.

Лемма Чебышева. Вероятность того, что случайная величина X, принимающая только неотрицательные значения, превосходит некоторое число α , не больше, чем ее математическое ожидание, разделенное на α:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M[X]}{\alpha}.$$

Пример 6.1. Дискретная случайная величина X дана своим рядом распределения

X	0	1	2	3	4	5
P	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

и $\alpha = 3$. Найти вероятность $P(X \geq 3)$ и оценить эту вероятность, используя лемму Чебышева.

Решение. $P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5) = 16/32 = 0,5$;

$$M[X] = 1 \cdot 5/32 + 2 \cdot 10/32 + ... + 5 \cdot 1/32 = 2,5.$$

Используя лемму Чебышева, получим: $P(X \geq 3) \leq 2,5/3 \approx 0,83$.

При подсчете вероятности $P(X \geq 3)$ мы получили 0,5. Это действительно меньше, чем 0,83.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Ясно, что для практики это неравенство имеет ограниченное применение, т.к. при $D[X] > \varepsilon^2$ получим в результате, что вероятность какого-то факта больше отрицательного числа .

Пример 6.2. Случайная величина X задана своим рядом распределения

X	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10

Найти вероятность того, что $|X - M[X]| < 2$. Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

Решение. $M[X] = 1 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,10 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,30 + 5 \cdot 0,20 + 6 \cdot 0,10 = 3,80$.
Неравенство $|X - 3,8| < 2$ равносильно двойному неравенству $-2 < X - 3,8 < 2$, т.е. $1,8 < X < 5,8$. Этому требованию удовлетворяют лишь следующие значения случайной величины X: $2, 3, 4, 5$. Поэтому

$$P(|X - 3,8| < 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,10 + 0,25 + 0,30 + 0,24 = 0,85,$$

$$D[X] = M\left[X^2\right] - 3,8^2 = 0,05 + 0,40 + 9 \cdot 0,25 + 16 \cdot 0,30 + 25 \cdot 0,20 + 36 \cdot 0,10 - 14,44 = 16,10 - 14,44 = 1,66,$$

$$P(|X - 3,8| < 2) \geq 1 - 1,66/4 = 0,585.$$

Неравенство Чебышева действительно справедливо. В нашем примере получили, что 0,85>0,58.

Теорема Чебышева

Если $X_1, X_2, ..., X_n ...$ − попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их не превышают постоянного числа C, то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M[X_1] + M[X_2] + ... + M[X_n]}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико. Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M[X_1] + M[X_2] + ... + M[X_n]}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

иными словами: среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, или

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \frac{M[X_1] + M[X_2] + ... + M[X_n]}{n}.$$

Следствие. Пусть имеем n попарно независимых случайных величин X_i с ограниченными дисперсиями и равными математическими ожиданиями $M[X_i] = a$. Тогда $\frac{1}{n}\sum_i X_i \xrightarrow[n \to \infty]{P} \frac{1}{n}\sum_i M[X_i]$, следовательно, $\frac{1}{n}\sum_i X_i \xrightarrow[n \to \infty]{P} a$.

Сущность теоремы Чебышева такова: хотя отдельные независимые случайные величины могут принимать значения, далекие от своих математических ожиданий, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определенному постоянному числу

$$\frac{M[X_1] + M[X_2] + ... + M[X_n]}{n}.$$

Итак, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин, дисперсии которых ограничены, утрачивают характер случайной величины. В качестве примера применения теоремы Чебышева можно рассмотреть измерение физической величины. Обычно производят несколько измерений и их среднее арифметическое принимают в качестве искомого размера. На теореме Чебышева основан и широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности исследуемых объектов.

Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то относительная частота появления события в серии из n испытаний сходится по вероятности к вероятности события в отдельном испытании:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1, \quad \text{или} \quad \frac{m}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P} p .$$

Теорема Ляпунова

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ − независимые случайные величины, где n − достаточно велико; $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, причем влияние X_i на всю сумму мало. Тогда как бы ни были распределены случайные величины X_i, закон распределения случайной величины X близок к нормальному.

Пример 6.3. Случайные величины X_i, $i=1,2,\ldots 150$ распределены по равномерному закону на промежутке $(-2,\ 4)$. Найти закон распределения случайной величины $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Записать для него плотность распределения.

Решение. Случайная величина X распределена по закону, близкому к нормальному. Чтобы записать для него функцию $f(x)$, надо определить $a=M[X]$ и $\sigma^2[X]$:

$$a=M[X]=\sum_{i=1}^{150} M[X_i]=\sum_{i=1}^{150}\frac{4-2}{2}=\sum_{i=1}^{n} 1=150,$$

$$\sigma^2=D[X]=\sum_{i=1}^{150} D[X_i]=\sum_{i=1}^{150}\frac{(4-(-2))^2}{12}=\sum_{i=1}^{150} 3=450, \qquad (\sigma=15\sqrt{2}),$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,15\sqrt{2}}\,e^{-\frac{(x-150)^2}{2\cdot 450}}=\frac{1}{30\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{(x-150)^2}{2\cdot 450}}.$$

Локальная и интегральная теоремы Лапласа были сформулированы в п 2.5.

7. Элементы математической статистики

Задача математической статистики - создание методов сбора и обработки экспериментальных (статистических) данных с целью получения достоверной информации о случайной величине, интересующей экспериментатора.

7.1. Статистическое изучение случайной величины

Множество всех объектов, подлежащих изучению, называют ***генеральной совокупностью.*** Обычно наблюдение всех элементов совокупности сопряжено с трудностями различного характера: большое число объектов в совокупности, необходимость уничтожения объектов при некоторых видах испытаний и т.п. Поэтому из генеральной совокупности отбирают подмножество объектов и называют его ***выборкой*** или ***выборочной совокупностью.*** Объемом выборочной или генеральной совокупности называют количество объектов соответствующей совокупности. ***Выборка*** называется ***повторной***, если случайно отобранный для обследования объект возвращается в генеральную совокупность перед отбором следующего объекта. В противном случае ***выборка*** называется ***бесповторной.***

Для того чтобы по данным выборки можно было уверенно судить о всей совокупности, необходимо, чтобы члены выборки достаточно хорошо и правильно ее представляли. Это требование формулируют следующим образом: выборка должна быть ***репрезентативной*** (представительной). Считается, что выборка будет репрезентативной, если

а) объем выборки достаточно большой,
б) обеспечена случайность отбора объектов совокупности,
в) вероятность попасть тому или иному объекту в выборку одинакова.

Пусть изучается некоторый признак X генеральной совокупности. Возможные значения признака $x_1, x_2, ..., x_n, \ldots$ принято называть ***вариантами.*** Обозначим через m_i частоту появления варианты x_i, через n — объем выборки, через $w_i = m_i/n$ — относительную частоту. Таблицу, в которой перечислены в возрастающем порядке варианты признака X и соответствующие частоты (иногда относительные частоты), называют законом распределения признака X или ***дискретным статистическим рядом.***

Таблица 1

X	x_1	x_2	...	x_k
m	m_1	m_2	...	m_k

, где $\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$

Таблица 2.

X	x_1	x_2	...	x_k
W	m_1/n	m_2/n	...	m_k/n

, где $\sum_{i=1}^{k} m_i / n = 1$.

Табл.1 представляет дискретный статистический ряд по частотам, а табл.2 — по относительным частотам. Кроме дискретных рядов в статистике рассматривают ***интервальные ряды.*** В этом случае варианты группируют по интервалам (разрядам). Например, значения, приведенные в табл.3 представляют собой интервальный ряд, в котором приведены результаты измерения основного размера 70 деталей $(n = 70)$.

Таблица 3.

X мм	199-200	200-201	201-202
Количество деталей	13	21	36

Интервальный ряд легко перестраивается в дискретный по средним значениям в каждом интервале. Так, в табл. 4 указан в первой строке средний размер деталей для каждого интервала.

Таблица 4

X	199,5	200,5	201,5
m	13	21	36

Часто используют графические изображения статистических рядов: для дискретного ряда — полигон, для интервального ряда — гистограмму. ***Полигон*** частот (относительных частот), есть ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_1, m_1), (x_2, m_2),...,(x_i, m_i),... (соответственно, (x_1, w_1), (x_2, w_2),...,(x_i, w_i),...)

Гистограмма частот (относительных частот) есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и высотами $h_i = m_i / \Delta x_i (w_i / \Delta x_i)$. Площадь всей гистограммы частот равна n (объему выборки), а площадь всей гистограммы относительных частот равна 1.

Пример 7.1. В магазине в течение 0,5 часа продано 10 пар обуви размеров 38, 39, 40, 38, 39, 41, 40, 42, 38, 45. Построить дискретный статистический ряд, интервальный ряд, полигон, гистограмму частот признака X — размера проданной обуви.

Решение. Возможные значения признака X в порядке возрастания: 38, 39, 40, 41, 42, 45. Найдем соответствующие частоты (относительные частоты) и составим таблицу.

Таблица 5

X	38	39	40	41	42	45
m	3	2	2	1	1	1
W	3/10	2/10	2/10	1/10	1/10	1/10

Получим дискретный статистический ряд. Для построения полигона частот на оси ординат откладываем частоты, а по оси абсцисс — значения признака X. Соединяем ломаной точки: (38; 3),(39; 2), (40; 2) и т.д. На рис. 25 представлен полигон частот.

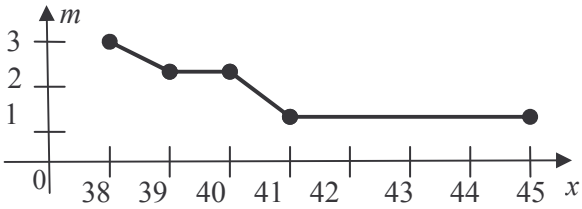

Рис.25

В табл.6 представлен интервальный статистический ряд, при этом частота $m_3 = 2$ признака $X = 40$, разделена пополам и половина ее (1) отнесена к первому интервалу, а вторая половина (1) ко второму. В каждом подобном случае экспериментатор заранее обговаривает правило отнесения пограничной частоты.

Таблица 6

X	38-40	40-42	42-45
m	6	3	1
W	6/10	3/10	1/10

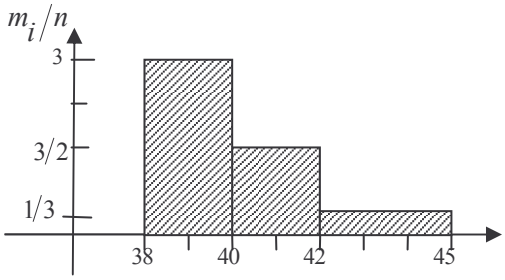

Рис.26

Построим теперь гистограмму частот (рис. 26).

Для этого вычислим $\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 40 - 38 = 2,\ \Delta x_2 = 42 - 40 = 2,\ \Delta x_3 = 45 - 42 = 3$ и со-x ответствующие высоты прямоугольников $h_1 = \dfrac{m_1}{\Delta x_1} = \dfrac{6}{2} = 3,\ h_2 = \dfrac{m_2}{\Delta x_2} = \dfrac{3}{2},\ h_3 = \dfrac{1}{3}$.

Одной из форм закона распределения случайной величины является функция распределения *F(x)=P(X<x),* которую в статистике называют теоретической. Для статистического ряда аналогично вводится эмпирическая функция распределения $F^*(x)=W(X<x)$, определяющая относительную частоту события, заключающегося в том, что случайная величина *X* примет значение меньшее некоторого фиксированного *x*, т.е. $F^* = m_x / n$, где m_x – число вариант, меньших *x*. При достаточно большом объеме выборки *n* имеем $F^*(x) \approx F(x)$. Свойства эмпирической функции распределения $F^*(x)$ аналогичны свойствам функции распределения дискретной случайной величины *F(x)*.

Пример 7.2. Найти $F^*(x)$ признака *X,* рассмотренного в примере 7.1, построить ее график.

Решение: $F^*(x)$, где *x* – любое число, не больше 38, равно $W(X < x) = 0$, т.к. значение, не больше 38, случайная величина *X* не принимает. Функция $F^*(x)$, где $x \in (38, 39]$, равна $W(X < x) = m_x / n = 3/10$; функция $F^*(x)$, где $x \in (39, 40]$, равна $W(X < x) = m_x / n = (3+2)/10 = 5/10$, и т.д: Таким образом,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 38; \\ 3/10, & 38 < x \le 39; \\ 5/10, & 39 < x \le 40; \\ 7/10, & 40 < x \le 41; \\ 8/10, & 41 < x \le 42; \\ 9/10, & 42 < x \le 45; \\ 1, & x > 45. \end{cases}$$

Построим график $F^*(x)$ (рис.27).

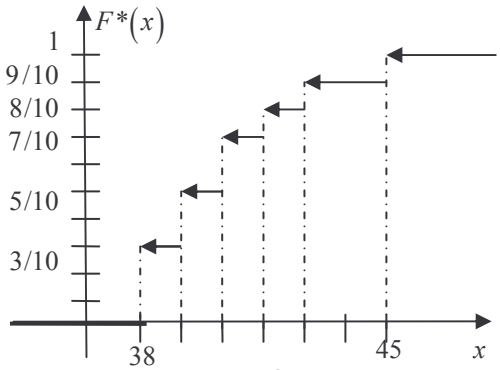

Рис.27

7.2. Статистические оценки параметров распределения

Пусть имеется генеральная совокупность объема *N* и $X_Г$ — изучаемый признак. Для изучения этого признака генеральной совокупности производится репрезентативная выборка объема *n*; получим выборочное распределение:

X	x_1	x_2	…	x_k
W	w_1	w_2	…	w_k

, где $w_i = \dfrac{m_i}{n},\ \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$

Далее можно вычислить среднюю выборочную $\overline{X_B} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i$, дисперсию выборочную $D_B = D[X_B] = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \overline{X}_B)^2$ и другие интересующие нас характеристики. Пусть $\theta_Г$ есть любая из числовых характеристик генеральной сово-

купности, т.е. $\theta_Г = \{M[X_Г], D[X_Г],...\}$. Обозначим через θ_B любую из выборочных характеристик, т.е. $\theta_B = \{\overline{X_B}, D_B,...\}$. Выборочная оценка θ_B является случайной величиной, т.к. процесс выборки носит случайный характер.

Существуют два вида оценок параметров распределения (числовых характеристик) изучаемого признака генеральной совокупности по данным выборки –точечные и интервальные оценки.

7.2.1. Точечные оценки

Итак, найдено θ_B. Можно ли утверждать, что $\theta_B \approx \theta_Г$? Да, если θ_B является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой $\theta_Г$.

Определение 1. Выборочная оценка θ_B называется ***несмещенной,*** если ее математическое ожидание равно $\theta_Г$, т.е. $M[\theta_B] = \theta_Г$.

Определение 2. Выборочная оценка θ_B называется ***эффективной,*** если при данном объеме выборки из всех возможных оценок она имеет наименьшую дисперсию.

Определение 3. Выборочная оценка θ_B называется ***состоятельной,*** если θ_B сходится по вероятности к $\theta_Г$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta_B - \theta_Г| < \varepsilon) = 1$.

Можно показать, что $\theta_B = \overline{X_B}$ является несмещенной и состоятельной оценкой $(\overline{X_Г})$. Если признак в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, то эта оценка является и состоятельной.

Итак, точечной выборочной оценкой генеральной средней $\overline{X_Г}$ является выборочная средняя $\overline{X_B}$, т.е. $\overline{X_Г} \approx \overline{X_B}$.

Пусть теперь требуется по выборке объема *n* оценить дисперсию признака генеральной совокупности. Естественно было бы в качестве точечной оценки $D_Г[X]$ провозгласить $D_B[X]$, но этого делать нельзя, т.к. $M[D_B] = \frac{n-1}{n} D_Г$, т.е. D_B – смещенная оценка $D_Г$. Поэтому за точечную выборочную оценку $D_Г = D[X_Г]$ берут ***исправленную дисперсию***, обозначаемую $S_B^2 = \frac{n}{n-1} D_B$.

Если признак в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, то эта оценка является и состоятельной, и эффективной.

7.2.2. Интервальные оценки

При точечных оценках параметров распределения мы используем при определенных условиях приближенное равенство $\theta_B \approx \theta_Г$. Это равенство характеризуется некоторой абсолютной погрешностью $|\theta_B - \theta_Г|$, которую называют ***ошибкой выборки***. Ошибка выборки, как и сама выборочная характеристика θ_B, является случайной величиной, и поэтому мы можем лишь указать вероятность γ того, что эта ошибка не превысит заданную величину: $\gamma = P(|\theta_B - \theta_Г| < \varepsilon)$. Величину $\gamma = P(|\theta_B - \theta_Г| < \varepsilon)$ называют ***доверительной веро-***

ятностью *или* ***надежностью оценки*** $\theta_Г$ по $\theta_В$, а ε — ***точностью оценки*** при данном значении γ.

Если $|\theta_В - \theta_Г| < \varepsilon$, то $\theta_В - \varepsilon < \theta_Г < \theta_В + \varepsilon$. Значения $\theta_В - \varepsilon$ и $\theta_В + \varepsilon$ называют ***доверительными границами*** для определяемой характеристики $\theta_Г$. Очевидно, что чем меньше ε, тем точнее определяется $\theta_Г$ с данной доверительной вероятностью γ. Обычно надежность оценки γ задается наперед, причем γ близко к 1: 0,95; 0,99; 0,999.

Определение 4. Доверительным интервалом называют ***случайный интервал*** $(\theta_В - \varepsilon, \theta_В + \varepsilon)$, который содержит (накрывает) неизвестный параметр $\theta_Г$ с заданной надежностью γ.

7.2.3. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известном σ.

Пусть случайная величина X генеральной совокупности распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $\sigma = \sqrt{D[X_Г]}$, $a = M[X_Г]$, при этом среднее квадратическое отклонение σ считаем известным.

Пусть сделана выборка объема *n* и вычислено $\overline{X_В}$, которое является точечной оценкой математического ожидания ***a*** генеральной совокупности.

Определим, с какой надежностью мы покрываем математическое ожидание ***a*** доверительным интервалом при заданной точности ε, т.е. найдем $P\left(\left|\overline{X_В} - a\right| < \varepsilon\right)$ или $P(\overline{X_В} - \varepsilon < a < \overline{X_В} + \varepsilon)$.

В дальнейших выкладках будут использованы следующие два факта, которые мы дадим без доказательства.

1). Если случайная величина *X* распределена по нормальному закону, то и $\overline{X_В}$ как случайная величина тоже распределена по нормальному закону.

2). $\sigma^2\left[\overline{X_В}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$. Тогда $P\left(\left|\overline{X_В} - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\overline{X_В})}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) = \gamma$, где $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$, *Ф(t)* — функция Лапласа. Зная *σ, ε* и *n*, можно найти по таблице значений функции Лапласа надежность γ оценки $\overline{X_В}$ математического ожидания ***a***.

Обратная задача. По выборочному значению математического ожидания $\overline{X_В}$ и известному σ найти доверительный интервал, который с заданной надежностью γ покрывает математическое ожидание *a* генеральной совокупности. Это и есть задача получения интервальной оценки. Используя таблицы значений функции Лапласа, по γ определяют $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$, отсюда $\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$. Таким образом, получают искомый доверительный интервал $\left(\overline{X_В} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_В} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Пример 7.3. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним квадратичным отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания α по $\overline{X_B}$, если объем выборки $n = 36$ и задана надежность $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Из соотношения $2 \cdot \Phi(t) = 0{,}95$ получаем $\Phi(t) = 0{,}475$. По таблицам значений функции Лапласа находим $t = 1{,}96$. Тогда точность оценки $\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$. Доверительный интервал для a будет таким: $\left(\overline{X_B} - 0{,}98;\ \overline{X_B} + 0{,}98\right)$. Для полученного доверительного интервала поясним смысл заданной надежности: $\gamma = 0{,}95$ показывает, что в 95% случаев полученный доверительный интервал накрывает математическое ожидание a.

Замечания.

1). При возрастании объема n выборки ε→0, т.е. точность оценки увеличивается.

2). Если увеличивать надежность оценки γ, то величина t увеличивается (функция Лапласа $\Phi(t)$ — возрастающая), а следовательно, возрастает и ε — ошибка оценки, т.е. точность оценок уменьшается.

7.2.4. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестном σ

Для решения поставленной в заголовке задачи используется закон распределения случайной величины $T=\{t\}$, $t = \frac{\overline{X_B} - a}{S_B / \sqrt{n}}$, где $S_B = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}_B\right)^2}$ — несмещенная оценка среднего квадратичного отклонения.

Стьюдент (псевдоним английского математика Госсета) показал, что плотность вероятности случайной величины T задается функцией

$$f_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

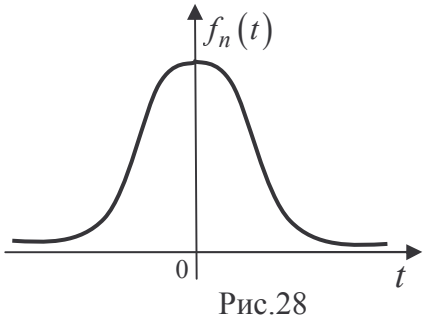

Рис.28

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция Эйлера. Это распределение называется распределением Стьюдента. График $f_n(t)$ похож на график плотности вероятности нормального закона, но $f_n(t)$ определяется только объемом выборки n и не зависит от неизвестных параметров a и σ (рис.28);

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Очевидно, что $P\left(|t|<t_\gamma\right)=\int\limits_{-t_\gamma}^{t_\gamma} f_n(t)\,d\,t=\gamma$. Функция $f_n(t)$ четная, поэтому можно записать $\gamma=2\int\limits_{0}^{t_\gamma} f_n(t)\,d\,t$. Это равенство позволяет найти t_γ по заданным n и γ. Во всех книгах по математической статистике имеются таблицы, по которым можно найти t_γ, зная n и γ. Учитывая, что $t=\dfrac{\overline{X_B}-a}{S_B/\sqrt{n}}$, можно записать

$$P\left(|t|<t_\gamma\right)=P\left(\frac{\left|\overline{X_B}-a\right|}{S_B/\sqrt{n}}<t_\gamma\right)=\gamma\ ,\quad \text{или}\quad P\left(\left|\overline{X_B}-a\right|<\frac{t_\gamma\cdot S_B}{\sqrt{n}}\right)=\gamma\ .$$

Таким образом, определив t_γ по таблице Стьюдента, можно найти доверительный интервал, покрывающий с надежностью γ математическое ожидание a генеральной совокупности.

Итак, по имеющейся выборке $x_1, x_2,...,x_n$ находим $\overline{X_B}$ и S_B . Затем, задаваясь надежностью γ, определяем доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание a. Другими словами, находим интервальную оценку математического ожидания.

Пример 7.4. Случайная величина X имеет нормальное распределение. С надежностью γ=0,95 найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a, если при объеме выборки $n=36$ получено $\overline{X_B}=24$, $S_B=3$.

Решение. По таблицам Стьюдента при $n=36$ и $\gamma=0{,}95$ находим $t_\gamma=2{,}03$. Тогда точность оценки $\dfrac{t_\gamma\cdot S_B}{\sqrt{n}}=\dfrac{2{,}03\cdot 3}{\sqrt{36}}=1{,}015$. Доверительный интервал для a

$$\left(\overline{X}_B-1{,}015;\ \overline{X}_B+1{,}015\right)=\left(22{,}985;\ 25{,}015\right).$$

Замечание. Так как при $n\to\infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному, то практически при $n>30$ можно пользоваться вместо распределения Стьюдента нормальным распределением.

Примеры для самостоятельного решения

1. Из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, сделана выборка

X	130	140	150	160	170	180	190
m	5	10	30	25	15	10	5

Найти: среднюю выборочную; выборочное среднее квадратичное отклонение; с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки математического ожидания генеральной совокупности; записать эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$, построить полигон частот и график $F^*(x)$.

Ответ: $\overline{X_B}=158{,}5;\ S_B=14{,}6;\ \varepsilon=2{,}9$; доверительный интервал (155,6;161,4).

2. При выборочном обследовании проб руды, добытой на руднике, получены следующие результаты

Содержание элемента *X, г.*	0,3-0,6	0,6-0,9	0,9-1,2	1,2-1,5	1,5-1,8	1,8-2,1	2,1-2,4	2,4-2,7	2,7-3,0
Количество проб	5	12	44	99	140	125	67	21	9

Построить гистограмму относительных частот. С надежностью 0,95 найти доверительный интервал для оценки центра распределения.

Ответ: $\overline{X_B}$ =1,716; $S_B = 0,448$; $\varepsilon = 0,038$; доверительный интервал $(1,678;\ 1,754)$.

8. Проверка статистических гипотез

8.1. Основные понятия

Часто функция распределения случайной величины бывает заранее неизвестна, и возникает необходимость ее определения по эмпирическим данным. Решение задачи в такой общей постановке вызывает значительные трудности и в большинстве случаев не является необходимым. Во многих случаях по выборке можно предположительно судить о законе распределения: выдвигается гипотеза – признак в генеральной совокупности распределен по равномерному закону, т.е. речь идет о виде предполагаемого распределения. Иногда закон распределения известен, но неизвестны его параметры. По выборке есть основание предположить, что искомый параметр равен θ_0 (выдвинута гипотеза: $\theta_0 \approx \theta_Г$). В этой гипотезе идет речь о предполагаемом значении параметра.

Статистической называют гипотезу ***о виде*** неизвестного ***распределения***, или ***о неизвестных параметрах*** известных распределений, или ***о сравнении параметров*** известных распределений.

Например: 1) дисперсии двух нормальных распределений равны;

2) генеральная совокупность распределена по закону Стьюдента;

3) параметр показательного распределения $0 < \lambda < 2$.

Вместе с выдвинутой гипотезой рассматривают противоположную (противоречащую) гипотезу. Если одна отвергается, то другая принимается. По этой причине их целесообразно различать.

Определение 1. Основной (нулевой) ***гипотезой*** H_0 называют выдвинутую гипотезу.

Определение 2. ***Альтернативной*** (конкурирующей) ***гипотезой*** H_1 называют гипотезу, которая противоречит выдвинутой.

Определение 3. Простой гипотезой называют любое предположение, однозначно определяющее распределение выборки *X*, в противном случае гипотеза называется сложной. Например, параметр λ показательного распределения равен двум ($\lambda = 2$) — простая гипотеза; параметр λ удовлетворяет условию: $0 < \lambda < 2$ — гипотеза сложная. В дальнейшем рассмотрены простые гипотезы.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому ее необходимо проверить по эмпирическим данным, т.е. по выборке. В итоге

проверки гипотезы могут быть приняты неверные решения в двух случаях, т. е. может быть допущена ошибка двух типов.

Определение 4. Ошибкой первого рода называют ошибку, допускаемую в случае, когда отвергнута правильная гипотеза (H_0 отвергнута, хотя она верна).

Ошибкой второго рода называют ошибку, допускаемую в случае принятия неправильной гипотезы (H_0 принята, хотя она неверна).

Для проверки гипотезы H_0 используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно.

Определение 5. Случайная величина *K*, служащая для проверки гипотезы H_0 (основной), называется ***статистическим критерием***, или просто критерием.

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называют значение критерия, вычисленное по выборке.

Определение 6. Вероятность совершить ошибку первого рода называют ***уровнем значимости критерия*** и обозначают через α.

Обычно он задается экспериментатором: $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$. После выбора критерия множество его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых основная гипотеза H_0 отвергается, другое — при которых гипотеза H_0 принимается.

Определение 7. Критической областью W_k называется совокупность значений критерия, при которых основная гипотеза H_0 отвергается.

Основной принцип проверки статистических гипотез состоит в следующем: если наблюдаемое значение критерия $K_{набл}$ принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если $K_{набл}$ принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

Определение 8. Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива альтернативная гипотеза H_1.

Пусть для проверки гипотезы принят ***определенный уровень значимости*** α и выборка имеет фиксированный объем *n*. Остается произвол в выборе критической области. Ее целесообразно выбирать так, чтобы мощность критерия была максимальной. Такой выбор критической области обеспечивает минимальную ошибку второго рода, что, конечно, желательно.

Пусть β — вероятность совершить ошибку второго рода (принята неправильная гипотеза), тогда мощность критерия равна $(1-\beta)$. Действительно, β — вероятность события «принята основная гипотеза H_0, причем справедлива альтернативная гипотеза H_1», тогда $(1-\beta)$ — вероятность противоположного события «отвергнута гипотеза H_0, причем справедлива гипотеза H_1», а это и есть мощность критерия.

Если мощность критерия $(1-\beta)$ увеличивается, то β — вероятность ошибки второго рода (принята неверная гипотеза) уменьшается.

8.2. Критерии согласия

Пусть закон распределения генеральной совокупности неизвестен, но есть основание предполагать, что он имеет определенный вид. Проверяем гипотезу H_0: закон распределения имеет данный вид (например, равномерный, нормальный и др.). Проверка гипотезы H_0 производится с помощью, как уже было сказано, специально подобранной случайной величины — критерия, который называют критерием согласия.

Итак, ***критерий согласия*** есть ***критерий*** проверки гипотезы ***о предполагаемом законе*** неизвестного ***распределения.***

Имеется несколько критериев согласия: χ^2 Пирсона (хи-квадрат Пирсона), Колмогорова, Мизеса-Смирнова и др. Мы познакомимся с критериями χ^2 и Колмогорова.

8.2.1. Критерий Пирсона

Пусть для изучения случайной величины X проведено n опытов. Весь диапазон наблюдавшихся значений величины X разобьем на k интервалов. Составим ряд распределения:

Интервалы	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	$\ldots$	(x_k, x_{k+1})
$p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$	p_1^*	p_2^*	$\ldots$	p_k^*

Здесь m_i — количество экспериментальных данных в i-м интервале. Понятно, что $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Вычислим, пользуясь предполагаемым теоретическим законом распределения, вероятности $p_i = P(x_i < X < x_{i+1})$. Пирсон ввел в рассмотрение величину $\sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}\left(p_i^* - p_i\right)^2 = \chi^2$ (хи-квадрат), которая характеризует степень расхождения теоретических и эмпирических данных. Учитывая, что $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, получим $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$. Оказалось, что независимо от закона распределения при больших n (при $n \to \infty$) случайная величина χ^2 имеет плотность вероятности

$$f(\chi^2) = \begin{cases} 0, & \chi^2 \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(\chi^2\right)^{\frac{r}{2}-1} \cdot l^{-\frac{\chi^2}{2}}, & \chi^2 > 0. \end{cases}$$

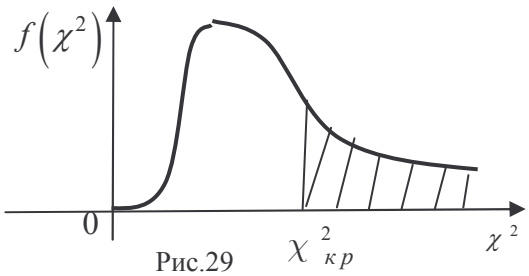

Рис.29

Здесь $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция Эйлера; $r = k - (l+1)$; k — число интервалов разбиения (оно выбирается произвольно); l — количество параметров предполагаемого теоретического распределения, определяемых из опыта. Число r называют числом степеней свободы. За-

кон распределения случайной величины χ^2 называют законом Пирсона. О графике функции $f(\chi^2)$ можно судить по рис. 29.

Замечание. В связи с асимптотическим характером закона Пирсона выборка для проверки испытуемой гипотезы должна быть достаточно большой, а именно: число интервалов $k \geq 5$ и в каждом интервале должно быть 10 значений или больше. Объем выборки n должен быть настолько большим, чтобы эти два условия выполнялись.

Как же применяется критерий Пирсона χ^2 для проверки статистических гипотез?

Схема применения критерия Пирсона

1. По опытным данным выдвигаем испытуемую гипотезу H_0 о законе распределения случайной величины и вычисляем величину $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_i - n\,p_i\right)^2}{n\,p_i}$.

2. Находим число степеней свободы $r = k - l - 1$, где k — число интервалов; l — число определяемых по выборке параметров предполагаемого теоретического распределения.

3. Задаем уровень значимости α.

4. По заданным α и r находим $\chi^2_{кр}$, пользуясь таблицей Пирсона.

5. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то гипотезу H_0 отвергаем, если же $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то H_0 принимаем.

Пример 8.1. На экзамене по данному предмету экзаменатор задает студенту только один вопрос по одной из четырех частей курса. Из 100 студентов 26 получили вопрос по первой части, 32 — по второй, 17 — по третьей, остальные — по четвертой. Можно ли по этим результатам принять гипотезу, что для пришедшего на экзамен имеется одинаковая вероятность получить вопрос по любой из четырех частей? (Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$).

Решение. В данной задаче $n = 100$, $m_1 = 26$, $m_2 = 32$, $m_3 = 17$, $m_4 = 100 - (26 + 32 + 17) = 25$. Вероятность получить вопрос по любой из четырех частей одинакова, т.е. $p_i = p = 0,25$, $n \cdot p_i = 25$; $(i = 1,2,3,4)$. Находим

$$\chi^2_{набл} = \frac{(26-25)^2}{25} + \frac{(32-25)^2}{25} + \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(25-25)^2}{25} = \frac{1+49+64}{25} = \frac{114}{25} = 4,56 .$$

Так как ни один из параметров предполагаемого распределения не находился нами по выборке, то $l = 0$; число $k = 4$ и число степеней свободы $r = 4 - (0+1) = 3$. По таблице для $r = 3$ и $\alpha = 0,05$ находим $\chi^2_{кр} = 7,82$ — граница критической области. Получаем $\chi^2_{набл} = 4,56 < \chi^2_{кр} = 7,82$, т.е. выдвинутая гипотеза подтвердилась.

Пример 8.2. Распределение признака X в выборке задано следующим вариационным рядом (интервальным).

X	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
m	12	43	79	47	19

, $n = 200$.

При уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о нормальном распределении признака X в генеральной совокупности.

Решение. Гипотеза H_0 - случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a = M[X]$, $\sigma^2 = D[X]$. По выборке вычислим точечные оценки ***двух*** параметров нормального распределения. $a \simeq \overline{X_B}$, $\sigma^2 \simeq S_B^2$. S_B^2 — исправленная дисперсия. Обозначим через $\tilde{x}_i$ — середины интервалов, через $x_i' = \frac{\tilde{x}_i - C}{h}$, $C = 35$, h =10.

Вычисление $\overline{X_B}$ и S_B^2 :

Таблица 8

X	m_i	$\tilde{x}_i$	x_i'	$(x_i')^2$	$m_i x_i'$	$m_i (x_i')^2$
10-20	12	15	-2	4	-24	48
20-30	43	25	-1	1	-43	43
30-40	79	35	0	0	0	0
40-50	47	45	1	1	47	47
50-60	19	55	2	4	38	76
Σ	200				18	214

$$\overline{X_B'} = \frac{18}{200} = 0,09 \ ; \ \overline{X_B} = 35 + 10 \cdot 0,09 = 35,9 \ ; \ \overline{\left(X'^2_B\right)} = \frac{214}{200} = 1,07 \ ;$$

$$D_B\left[X'\right] = 1,07 - 0,09^2 = 1,062 \ ; \ \sigma_B' = 1,03 \ ; \ D_B\left[X\right] = 1,062 \cdot 10^2 = 106,2 \ ; \ \sigma_B\left[X\right] = 10,3 \ .$$

Так как $n = 200$ достаточно велико, то $S_B \simeq \sigma_B\left[X\right]$.

Расчет частот $m_i' = n \cdot p_i$ приводится в табл.9 с использованием формул:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_B \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x-\overline{X_B}\right)^2}{2\sigma_B^2}}, \ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ где } t = \frac{x - \overline{X_B}}{\sigma_B} \ ; \ p_i = \frac{\Delta x_i}{\sigma_B}\varphi(t) \ .$$

Вычислим также $\frac{\Delta x_i}{\sigma_B} = \frac{10}{10,3} = 0,97$, $n = 200$; $m_i' = n \cdot p_i$ округлим до целого (для упрощения счета).

Таблица 9

$\tilde{x}$	$\tilde{x} - \overline{X_B}$	$t = \frac{\tilde{x} - \overline{X_B}}{\sigma_B}$	$\varphi(t)$	$p_i = \frac{\Delta x_i}{\sigma_B}\varphi(t)$	$m_i' = n \cdot p_i$	m_i'
15	-20,9	-2,03	0,0508	0,0493	9,86	10
25	-10,9	-1,06	0,2275	0,2207	44,14	44
35	-0,9	-0,09	0,3973	0,3854	77,08	77
45	9,1	0,88	0,2709	0,2628	52,56	53
55	19,1	1,85	0,0721	0,0699	13,98	14

Расчет χ^2 приводится в табл. 10.

Таблица 10

m_i	m'_i	$m_i - m'_i$	$(m_i - m'_i)^2$	$\frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}$
12	10	2	4	0,400
43	44	-1	1	0,023
79	77	2	4	0,052
47	53	-6	36	0,680
19	14	5	25	1,800

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i} = 2,955\,;\ \chi^2_{набл} = 2,955 \cong 2,96\ ;$$

$l = 2$ (по выборке найдено *a, σ*); $k = 5$; $r = 5 - (2+1) = 2$. По числу степеней свободы $r = 2$ и уровню значимости $\alpha = 0,01$ находим по таблице

$$\chi^2_{кр} = 9,2, \quad \chi^2_{набл} = 2,96 < \chi^2_{кр} = 9,2\,.$$

Вывод. Гипотеза о нормальном законе распределения признака *X* в генеральной совокупности согласуется с опытными данными (гипотеза принимается).

8.2.2. Критерий Колмогорова

Предположим, что на основании опытных данных построена эмпирическая функция распределения $F^*_э(x)$. Выдвигается испытуемая гипотеза: генеральная совокупность имеет функцию распределения $F(x)$ (рис. 30).

Теорема Колмогорова. Если функция распределения *F(x)* непрерывна, то при $n \to \infty$

$$P\left(M_n \sqrt{n} < \lambda\right) \to K(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}, & \lambda > 0; \\ 0, & \lambda \le 0. \end{cases}$$

Здесь величина $M_n = \max\limits_x \left|F^*_э(x) - F(x)\right|$ характеризует меру расхождения теоретической и эмпирической функций распределения. Очевидно, при больших $M_n\sqrt{n}$ мы должны сделать вывод, что $F^*_э(x)$ плохо согласуется с выбранной теоретической функцией распределения *F(x)*, и отвергнуть испытуемую гипотезу.

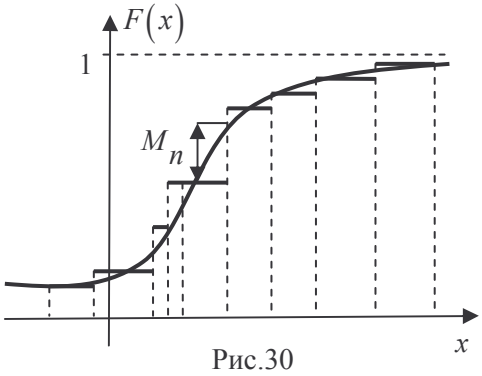

Рис.30

Другими словами, критическая область имеет вид: $W_K = \left(\lambda_{кр}, +\infty\right)$. Граница критической области определяется, как всегда, уровнем значимости α; $\lambda_{кр}$ должно быть таким, чтобы

$$P\left(\lambda_{кр} < \lambda < \infty\right) = K(\infty) - K(\lambda_{кр}) = \alpha\ ,$$

или, учитывая, что $K(\infty) = 1$, получим $1 - K(\lambda_{кр}) = \alpha$. Введем в рассмотрение функцию $\psi(\lambda) = 1 - K(\lambda)$. Тогда граница критической области определяется из уравнения $\psi(\lambda_{кр}) = \alpha$. Для функции $\psi(\lambda)$

составлены таблицы, по которым можно определить $\lambda_{кр}$ по заданному α (округлять $\lambda_{кр}$ следует с избытком!). Приведем фрагмент этой таблицы.

Значения функции $\psi(\lambda)$

λ	$\psi(\lambda)$	λ	$\psi(\lambda)$	λ	$\psi(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,000	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,000	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,000	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

Если вычисленное из опыта $\lambda = M_n\sqrt{n}$ окажется больше, чем $\lambda_{кр}$, то λ попадает в критическую область, и испытуемую гипотезу надо отвергнуть. Если же $\lambda < \lambda_{кр}$, то гипотезу следует принять.

Схема применения критерия Колмогорова

1. По опытным данным выдвигаем гипотезу о законе распределения.

2. Вычисляем $\lambda = M_n\sqrt{n}$, где $M_n = \max\limits_x \left|F_э^*(x) - F(x)\right|$. На практике $F_э^*(x) = W(X < x)$, W — относительная частота. Пусть M — накопленная теоретическая частота, M' — накопленная эмпирическая частота, тогда $\lambda = \max\limits_i \dfrac{|M - M'|}{\sqrt{n}}$.

3. Зададим уровень значимости α.

4. По таблице функции $\psi(\lambda)$ находим $\lambda_{кр}$ такое, что $\psi(\lambda) = \alpha$.

5. Если $\lambda > \lambda_{кр}$, то гипотеза отвергается; если $\lambda < \lambda_{кр}$, то гипотезу принимают.

Применим критерий Колмогорова к задаче, рассмотренной в примере 8.2. Составим таблицу:

$\tilde{x}$	m_i	m_i'	M_i	M_i'	$M_i - M_i'$
15	12	10	12	10	2
25	43	44	55	54	1
35	79	77	134	131	3
45	47	53	181	184	-3
55	19	14	200	198	2

Здесь $\max\limits_i \left|M_i - M_i'\right| = 3$; $\lambda = \dfrac{3}{\sqrt{200}} = \dfrac{3}{10\sqrt{2}} = \dfrac{3}{10 \cdot 1,4} = \dfrac{3}{14} = 0,22$; $\lambda_{набл} = 0,22$.

Пусть $\alpha = 0,01$. По таблице значений функции $\psi(\lambda)$ при условии $\psi(\lambda_{кр}) = 0,01$ находим $\lambda_{кр}$ =1,6. Так как $\lambda_{набл} = 0,22 < \lambda_{кр} = 1,6$, то гипотезу следует принять.

Примеры для самостоятельного решения

1. При 120 подбрасываниях игральной кости на верхней грани единица выпала $m_1 = 25$ раз, двойка — $m_2 = 19$, тройка — $m_3 = 15$, четверка — $m_4 = 25$, пятерка —

$m_5 = 15$ и, наконец, шестерка — $m_6 = 21$ раз. Применяя критерий Пирсона, выяснить, согласуется ли это с гипотезой, что кость правильной формы? (принять $\alpha = 0,01$). *Ответ*: согласуется ($\chi^2_{набл} = 5,1;\ \chi^2_{кр} = 11,07$).

2. Распределение признака *X* в выборке дается следующим вариационным рядом

X	3,0-3,6	3,6-4,2	4,2-4,8	4,8-5,4	5,4-6,0	6,0-6,6	6,6-7,2
m_i	2	8	35	43	22	15	5

При уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о нормальном распределения признака *X* в генеральной совокупности, применяя критерий χ^2 .

Ответ: согласуется.

9. Элементы теории корреляции

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины *Y* от одной или нескольких величин. Рассмотрим зависимость *Y* от одной случайной величины *X*.

Рассматриваемая в математическом анализе функциональная зависимость предполагает, что каждому значению одной переменной *x* соответствует единственное значение переменной *y=f(x)*. Между случайными величинами кроме функциональной зависимости могут существовать зависимости другого рода.

Определение 1. Зависимость между случайными величинами *X* и *Y* называют ***статистической,*** если изменение одной из них влечет изменение закона распределения другой.

Определение 2. Зависимость между случайными величинами *X* и *Y* называют ***корреляционной,*** если изменение одной из них влечет изменение закона распределения другой, при этом изменяется и среднее значение.

Приведем пример случайной величины *Y*, корреляционно зависимой от случайной величины *X*. Пусть *Y* — урожай зерна, *X* — количество удобрений, внесенных в угодья. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, т.е. *Y* не является функцией *X*. Это объясняется влиянием и других случайных факторов (обработка земли, осадки, температура и др.). Но из опыта известно, что ***средний*** урожай является функцией от количества удобрений, т.е. *X* и *Y* связаны корреляционной зависимостью.

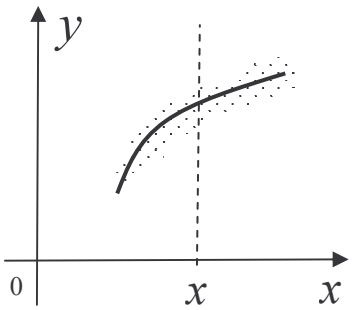

Рис.31

Пусть результаты измерений величин *X* и *Y* представлены на рис. 31. Для каждого фиксированного значения *x* случайная величина *Y* имеет некоторый закон распределения — свой для каждого *x*. Условное математическое ожидание $M[Y/x] = \overline{y_x}$ является функцией от *x*. Ее называют ***регрессией*** *Y* по *X*. График

функции $\overline{y_x}$ называется кривой регрессии Y по X (иногда — теоретической ривой регрессии). На этой кривой расположены центры условных распределений случайной величины Y, соответствующих заданным значениям x.

Аналогично, функция $\overline{x}_y = M\left[X / y\right]$ называется регрессией X по Y (сопряженной регрессией).

В теории корреляции рассматривают две основные задачи:

1. Установить форму корреляционной связи, т.е. вид функции регрессии.

2. Оценить тесноту корреляционной связи, которая оценивается по величине рассеивания значений Y относительно условного среднего $\overline{y_x}$: большое рассеивание свидетельствует о слабой зависимости Y от X (либо говорит вообще об отсутствии таковой), малое рассеивание указывает на наличие достаточно сильной зависимости, может быть даже функциональной.

9.1. Корреляционная таблица. Опытные линии регрессии

Изучение статистической зависимости начинают с составления корреляционной таблицы. Пусть признак X принимает значения $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ с частотой $n_1, n_2, ..., n_k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ (n — объем выборки); признак Y принимает значения $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ с частотой $m_1, m_2, .., m_l$, $\sum_{i=1}^{l} m_i = n$. Обозначим через m_{ij} частоту появления пары значений (x_j, y_i), $\sum_i \sum_j m_{ij} = n$.

Следующая таблица называется ***корреляционной***

$Y \backslash X$	x_1	x_2	…	x_k	m_y
y_1	m_{11}	m_{12}	…	m_{1k}	m_1
y_2	m_{21}	m_{22}	…	m_{2k}	m_2
…	…	…	…	…	…
y_l	m_{l1}	m_{l2}	…	m_{lk}	m_l
n_x	n_1	n_2	…	n_k	n

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = m_i; \quad i = \overline{1, l}; \ (m_y)$$

$$\sum_{i=1}^{l} m_{ij} = n_j; \quad j = \overline{1, k}; \ (n_x)$$

$$\sum_{i=1}^{l} m_i = n \ , \ \sum_{j=1}^{k} n_j = n \ .$$

Для наглядности данные этой таблицы изображают графически. Каждую пару (x_j, y_i) изображают точкой в системе координат (XOY). Частоту m_{ij}, с которой данная пара встречается в таблице, изображают соответствующим числом близко расположенных точек, либо пишут число m_{ij} возле одной точки. Построенное таким образом в системе координат изображение корреляционной таблицы называют ***полем корреляции***.

По корреляционной таблице можно найти законы распределения составляющих:

X	x_1	x_2	…	x_k
n_x	n_1	n_2	…	n_k

;

Y	y_1	y_2	…	y_l
m_y	m_1	m_2	…	m_l

и их средние $\overline{X_B}$, $\overline{Y_B}$.

Точка в системе координат (*XOY)* с координатами $(\overline{X_B}, \overline{Y_B})$ называется ***центром рассеивания***.

Можно также составить условные законы распределения, например, *Y* при $X = x_j$ или *X* при $Y = y_i$.

Y/x_j	y_1	y_2	…	y_l
m	m_{1j}	m_{2j}	…	m_{lj}

Зная условные законы распределения, можно найти условные средние, например $\overline{Y}/x_1$, $\overline{Y}/x_2$, ..., $\overline{Y}/x_k$. Построим в системе координат (*XOY*) точки $(x_j, \overline{Y}/x_j)$ и соединим их отрезками прямых. Полученную ломаную называют ***опытной линией регрессии*** *Y* на *X*. Аналогично можно построить опытную линию регрессии *X* на *Y*.

Пример 9.1. Дана корреляционная таблица.

$Y \backslash X$	60	70	80	90	100	m_y
25	3					3
30	5	12	3			20
35		11	28	3		42
40			4	13	2	19
45				4	10	14
50					2	2
n_x	8	23	35	20	14	100

Решение. Вычислим сначала центр рассеивания. Составим вспомогательную таблицу для $X' = \dfrac{X - C}{h} = \dfrac{X - 80}{10}$; $Y' = \dfrac{Y - 35}{5}$.

$Y' \backslash X'$	-2	-1	0	1	2	$m_{y'}$
-2	3 (4)					3
-1	5 (2)	12 (1)	3 (0)			20
0		11 (0)	28 (0)	3 (0)		42
1			4 (0)	13 (1)	2 (2)	19
2				4 (2)	10 (4)	14
3					2 (6)	2
n_x	8	23	35	20	14	100

Замечание. В скобках записаны значения произведений $X' \cdot Y'$, что потребуется при решении примера 9.2.

$$\overline{X'} = \frac{-2 \cdot 8 - 1 \cdot 23 + 0 \cdot 35 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 14}{100} = 0,09 \ ;$$

$$\overline{X_B} = 80 + 10 \cdot 0,09 = 80,9 \ ;$$

$$\overline{Y'} = \frac{-2\cdot 3 - 1\cdot 20 + 0\cdot 42 + 1\cdot 19 + 2\cdot 14 + 3\cdot 2}{100} = 0,27\ ;$$

$\overline{Y_B} = 35 + 5\cdot 0,27 = 36,35$; центр рассеивания: A (80,9; 36,35).

Вычислим условные средние $\overline{Y}/_{x_j}$

$$\overline{Y}/_{x=60} = \frac{25\cdot 3 + 30\cdot 5}{8} = \frac{225}{8} = 28,12\ ;$$

$$\overline{Y}/_{x=70} = \frac{30\cdot 12 + 35\cdot 11}{23} = \frac{745}{23} = 32,38\ ;$$

$$\overline{Y}/_{x=80} = \frac{30\cdot 3 + 35\cdot 28 + 40\cdot 4}{35} = \frac{1230}{35} = 35,16\ ;$$

$$\overline{Y}/_{x=90} = \frac{35\cdot 3 + 40\cdot 13 + 45\cdot 4}{20} = \frac{805}{20} = 40,25\ ;$$

$$\overline{Y}/_{x=100} = \frac{40\cdot 2 + 45\cdot 10 + 50\cdot 2}{14} = \frac{630}{14} = 45\ .$$

Поле корреляции и опытная линия регрессии изображены на рис. 32.

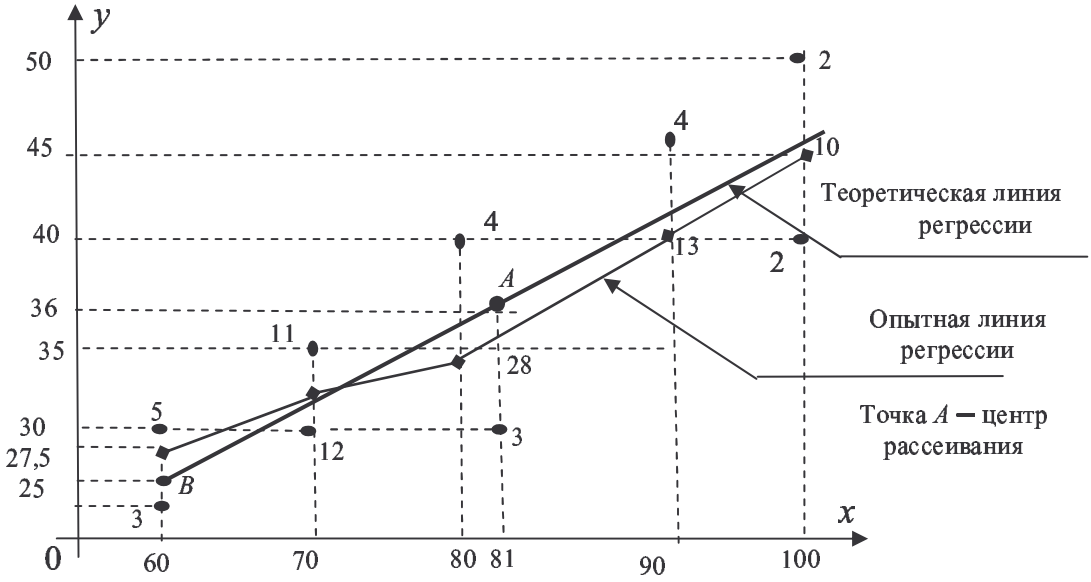

Рис.32

9.2. Линейная регрессия. Выборочный коэффициент корреляции

Линейная регрессия заслуживает внимания по нескольким причинам:

1. Для двумерной случайной величины *(X,Y),* распределенной по нормальному закону, регрессии составляющих линейны.
2. Нелинейную регрессию при определенных условиях можно аппроксимировать кусочно-линейной регрессией.
3. Нелинейную зависимость путем замены переменной можно свести к линейной.

Так как объем выборки конечен, то о линии регрессии можно судить лишь по форме опытной линии регрессии. Задача о нахождении теоретической линии регрессии сводится к выравниванию статистических распределений, например, методом наименьших квадратов.

Рассмотрим более подробно линейную регрессию. Пусть уравнение теоретической линии регрессии Y на X имеет вид: $\overline{y_x} = \beta x + \alpha$. Составим сумму квадратов отклонений эмпирических ординат от линии регрессии, т.е. $\sum_i \frac{m_i}{n}(\alpha + \beta x_i - \overline{y_i})^2$, где m_i- частота появления точки $(x_i;\, y_i)$. Эта сумма есть функция $U(\alpha,\beta) = \sum_i \frac{m_i}{n}(\alpha + \beta x_i - \overline{y_i})^2$ параметров α, β, которую нужно минимизировать. Используем необходимое условие экстремума для функции двух переменных: $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$; $\frac{\partial U}{\partial \beta} = 0$. После преобразований получим систему: $\begin{cases} \alpha + \beta\overline{X} = \overline{Y}, \\ \alpha\overline{X} + \beta\overline{\left(X^2\right)} = \overline{(XY)}. \end{cases}$. Решая систему, найдем: $\beta = \frac{\overline{(XY)} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{(X^2)} - \left(\overline{X}\right)^2}$; $\alpha = \overline{Y} - \beta\overline{X}$. Можно показать, что найденная точка $(\alpha,\ \beta)$ является точкой минимума.

Определение. Выборочным ***корреляционным моментом*** K_{xy} называется среднее произведения отклонений признаков X, Y от своих средних

$K_{xy} = \overline{\left(\left(X - \overline{X}\right)\cdot\left(Y - \overline{Y}\right)\right)}$ или, после преобразований, $K_{xy} = \overline{(XY)} - \overline{X}\cdot\overline{Y}$

(в формулах опущена буква “в” в обозначении выборочных характеристик). Тогда $\beta = \frac{K_{XY}}{D_B[X]} = \rho_{y/x}$ называется коэффициентом регрессии Y на X; $D_B = \overline{\left(X^2\right)} - \left(\overline{X}\right)^2$ - выборочная дисперсия.

Подставив α, β в уравнение теоретической линии регрессии, получим $\overline{y_x} = \rho_{y/x}X + \overline{Y} - \rho_{y/x}\overline{X}$, или $\overline{y_x} - \overline{Y} = \rho_{y/x}\left(x - \overline{X}\right)$ — уравнение прямой, проходящей через точку $(\overline{X},\overline{Y})$ — центр рассеивания, с угловым коэффициентом $\rho_{y/x}$. Преобразуем это уравнение к виду: $\frac{\overline{y_x} - \overline{Y}}{\sigma_B[Y]} = \rho_{y/x}\frac{\sigma_B[X]}{\sigma_B[Y]}\cdot\frac{x - \overline{X}}{\sigma_B[X]}$.

Рассмотрим коэффициент

$$\rho_{y/x}\frac{\sigma_B[X]}{\sigma_B[Y]} = \frac{\overline{(XY)} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{(X^2)} - \left(\overline{X}\right)^2}\cdot\frac{\sigma_B[X]}{\sigma_B[Y]} = \frac{K_{xy}\sigma_B[X]}{D_B[X]\sigma_B[Y]} = \frac{K_{xy}\sigma_B[X]}{\left(\sigma_B[X]\right)^2\sigma_B[Y]} = \frac{K_{xy}}{\sigma_B[X]\sigma_B[Y]} = r_B = r_{xy}\ .$$

Определение. Величина $r_{xy} = r_B = \frac{K_{xy}}{\sigma_B[X]\sigma_B[Y]}$ называется выборочным ***коэффициентом корреляции.***

Окончательно ***уравнение*** теоретической ***линейной регрессии*** принимает вид: $\frac{\overline{y_x} - \overline{Y}}{\sigma_B[Y]} = r_B\cdot\frac{x - \overline{X}}{\sigma_B[X]}$. Аналогично можно получить уравнение теоретической регрессии X на Y.

Выборочный коэффициент корреляции оценивает тесноту линейной корреляционной зависимости признаков X, Y.

Пусть $r_B = 0$, тогда $\overline{y_x} = \overline{Y}$; $(\overline{x_y} = \overline{X})$, т.е. условная средняя Y при различных x постоянна, т.е. X и Y не связаны линейной корреляционной зависимостью, линии регрессии параллельны осям координат. Если $r_B = \pm 1$, то $\overline{y_x} - \overline{Y} = \pm \frac{\sigma_B[Y]}{\sigma_B[X]}\left(x - \overline{X}\right)$, т.е. существует функциональная зависимость (обоснование следует из свойств r_B).

Таким образом, чем ближе $|r_B|$ к единице, тем более тесная линейная корреляционная зависимость существует между признаками X, Y. Без доказательства перечислим свойства выборочного коэффициента корреляции.

1. $\overset{\circ}{X} = \frac{X - \overline{X_B}}{\sigma_B[X]}$, $\overset{\circ}{Y} = \frac{Y - \overline{Y_B}}{\sigma_B[Y]}$ называют центрированными случайными величинами. Выборочный коэффициент $r_B = r_{xy}$ равен корреляционному моменту центрированных величин $\overset{0}{X}$, $\overset{0}{Y}$; $r_B = K_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}}$.

2. $r_{x-\alpha,\, y-\beta} = r_{xy}$.

3. $r_{x\alpha, y\beta} = \begin{cases} r_{xy}, & \alpha \cdot \beta > 0, \\ -r_{xy}, & \alpha \cdot \beta < 0. \end{cases}$

4. $|r_{xy}| \le 1$.

5. Если X, Y независимы, то $r_{xy} = 0$.

6. Для того чтобы признаки X и Y были связаны линейной функциональной зависимостью, необходимо и достаточно, чтобы $|r_{xy}| = 1$.

Пример 9.2. На основе опытных данных корреляционной таблицы предыдущего примера 9.1 вычислить выборочный коэффициент корреляции, построить теоретическую линию линейной регрессии.

Решение. Центр распределения нами уже найден: $(\overline{X_B}, \overline{Y_B}) = (80{,}9;\ 36{,}35)$. По свойствам $r_{xy} = \frac{K_{X'Y'}}{\sigma_B[X'] \cdot \sigma_B[Y']}$. Составим две вспомогательные таблицы для вычисления $\sigma_B[X']$, $\sigma_B[Y']$.

X'	n_x	$n_x \cdot X'$	$n_x \cdot (X')^2$
-2	8	-16	32
-1	23	-23	23
0	35	0	0
1	20	20	20
2	14	28	56
$\sum$	100	9	131

Y'	m_y	$m_y \cdot Y'$	$m_y \cdot (Y')^2$
-2	3	-6	12
-1	20	-20	20
0	42	0	0
1	19	19	19
2	14	28	56
3	2	6	18
$\sum$	100	27	125

$$D_B[X'] = \overline{\left(X'^2\right)} - \left(\overline{X'}\right)^2 = \frac{131}{100} - (0{,}09)^2 = 1{,}31 - 0{,}0081 = 1{,}302\ ;$$

$$\sigma_B[X'] = \sqrt{D_B[X']} = 1{,}14\ ; \quad \sigma_B[X] = 10 \cdot 1{,}14 = 11{,}4\ ;$$

$$D_B[Y'] = \overline{(Y'^2)} - \left(\overline{Y'}\right)^2 = \frac{125}{100} - (0{,}27)^2 = 1{,}25 - 0{,}07 = 1{,}18\ ;$$

$$\sigma_B\left[Y'\right] = \sqrt{1{,}18} = 1{,}08; \quad \sigma_B\left[Y\right] = 5 \cdot 1{,}08 = 5{,}4\ ;\ K_{X'Y'} = \overline{(X'Y')} - \overline{X'} \cdot \overline{Y'}\ .$$

(значения $\overline{X'} = 0{,}09$, $\overline{Y' = 0{,}27}$ взяты из примера 9.1).

Используя корреляционную таблицу для X', Y' и замечание к ней, вычислим

$$\overline{(X'Y')} = \frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{100} = \frac{111}{100} = 1{,}11;$$

$$K_{X'Y'} = 1{,}11 - 0{,}09 \cdot 0{,}27 = 1{,}11 - 0{,}02 = 1{,}09\ ;$$

$$r_B = r_{x'y'} = \frac{K_{X'Y'}}{\sigma_B[X'] \cdot \sigma_B[Y']} = \frac{1{,}09}{1{,}14 \cdot 1{,}08} = \frac{1{,}09}{1{,}23} = 0{,}88\ .$$

Вывод. Так как r_B достаточно близко к единице, то между признаками X и Y существует тесная линейная корреляционная зависимость.

Запишем уравнение теоретической линии регрессии:

$$\frac{\overline{y_x} - \overline{Y}}{\sigma_B[Y]} = r_{xy} \cdot \frac{x - \overline{X}}{\sigma_B[X]} \quad \text{или} \quad \overline{y_x} - \overline{Y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_B[Y]}{\sigma_B[X]}\left(x - \overline{X}\right);$$

$$\overline{y_x} - 36{,}35 = 0{,}88 \cdot \frac{5{,}4}{11{,}4}(x - 80{,}9)\ ; \quad \overline{y_x} = 0{,}42\,x + 2{,}38\ .$$

Для построения теоретической линии регрессии (см. рис.32) вычислим $y(60) = 0{,}42 \cdot 60 + 2{,}38 = 27{,}58 \cong 27{,}6$ (точка B). Вторая точка на линии регрессии — центр рассеивания (точка A).

Примеры для самостоятельного решения

Дана корреляционная таблица. Построить поле корреляции, опытную и теоретическую линии регрессии Y на X, найти центр распределения $\left(\overline{X_B},\ \overline{Y_B}\right)$, сделать вывод о тесноте линейной корреляционной зависимости между Y и X.

1.

Y \ X	5	10	15	20	25	30
45	2	4				
55		3	5			
65			5	35	5	
75			2	8	17	
85				4	7	3

2.

Y \ X	5	10	15	20	25	30
10	3	5				
20		4	4			
30			7	35	8	
40			2	10	8	
50				5	6	3

Ответы: **1.** Центр распределения $\left(\overline{X_B},\ \overline{Y_B}\right) = (20{,}2;\ 68{,}5)$.

Опытная линия регрессии: {(5;45), (10;49,3), (15;62,5), (20;68,4), (25;75,7), (30;85)}.

Теоретическая линия регрессии: $\overline{y_x} = 1{,}52x + 37{,}87$.

2. Центр распределения: (19,4; 32,4).

Опытная линия регрессии: {(5;10), (10;14,4), (15;28,5), (20;34), (25;39,1), (30;50)}.

Теоретическая линия регрессии: $\overline{y_x} = 1{,}52\,x + 2{,}91$.

Библиографический список

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика /В.Е. Гмурман. М.: Высшая школа, 2004. 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике /В.Е. Гмурман. М.: Высшая школа, 2004. 405 с.
3. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Колемаев.: М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 352 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей /Е.С. Вентцель. М.: Наука, 1984. 576 с.
5. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики /И.П. Натансон. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 736 с.
6. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
7. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы /А.Д. Мышкис. СПб.: Изд-во «Лань», 2002. 640 с.
8. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. М.: Физматлит, 2002. 224 с.
9. Лихолетов И. И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. /И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич. Минск: Высшая школа, 1976. 451 с.
10. Абрамова А. Б. Теория вероятности: учебное пособие / А.Б. Абрамова Р.А. Вайсбурд. Свердловск: УПИ, 2001. 111 с.
11. Абрамова А. Б. Математическая статистика: учебное пособие / А.Б. Абрамова, Р.А. Вайсбурд. Свердловск: УПИ, 2001. 84 с.
12. Вайсбурд Р. А. Основные понятия теории вероятностей: методические указания / Р.А. Вайсбурд, В.Б. Винокурова. Свердловск: УПИ, 1987. 45 с.
13. Вайсбурд Р. А. Случайные величины: методические указания по курсу “Высшая математика” / Р.А. Вайсбурд, В.Б. Винокурова. Свердловск: УПИ, 1989. 41 с.

Приложение 1

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,76	0,2764	1,52	0,4357	2,28	0,4887
0,02	0,0080	0,78	0,2823	1,54	0,4382	2,30	0,4893
0,04	0,0160	0,80	0,2881	1,56	0,4406	2,32	0,4898
0,06	0,0239	0,82	0,2939	1,58	0,4429	2,34	0,4904
0,08	0,0319	0,84	0,2995	1,60	0,4452	2,36	0,4909
0,10	0,0398	0,86	0,3051	1,62	0,4474	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,88	0,3106	1,64	0,4495	2,40	0,4918
0,14	0,1557	0,90	0,3159	1,66	0,4515	2,42	0,4922
0,16	0,0636	0,92	0,3212	1,68	0,4535	2,44	0,4927
0,18	0,0714	0,94	0,3264	1,70	0,4554	2,46	0,4931
0,20	0,0793	0,96	0,3315	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,22	0,0871	0,98	0,3365	1,74	0,4591	2,50	0,4938
0,24	0,0948	1,00	0,3413	1,76	0,4608	2,52	0,4941
0,26	0,1026	1,02	0,3461	1,78	0,4625	2,54	0,4945
0,28	0,1103	1,04	0,3508	1,80	0,4641	2,56	0,4948
0,30	0,1179	1,06	0,3554	1,82	0,4656	2,58	0,4951
0,32	0,1255	1,08	0,3599	1,84	0,4671	2,60	0,4953
0,34	0,1331	1,10	0,3643	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,36	0,1406	1,12	0,3686	1,88	0,4699	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,14	0,3729	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,40	0,1554	1,16	0,3770	1,92	0,4726	2,68	0,4963
0,42	0,1628	1,18	0,3810	1,94	0,4738	2,70	0,4965
0,44	0,1700	1,20	0,3849	1,96	0,4750	2,72	0,4967
0,46	0,1772	1,22	0,3883	1,98	0,4761	2,74	0,4969
0,48	0,1844	1,24	0,3925	2,00	0,4772	2,76	0,4971
0,50	0,1915	1,26	0,3962	2,02	0,4783	2,78	0,4973
0,52	0,1985	1,28	0,3994	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,54	0,2054	1,30	0,4032	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,56	0,2123	1,32	0,4066	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,58	0,2190	1,34	0,4099	2,10	0,4821	2,96	0,49846
0,60	0,2257	1,36	0,4131	2,12	0,4830	2,98	0,49856
0,62	0,2324	1,38	0,4162	2,14	0,4838	3,00	0,49865
0,64	0,2389	1,40	0,4192	2,16	0,4846	3,20	0,49931
0,66	0,2454	1,42	0,4222	2,18	0,4854	3,40	0,49966
0,68	0,2517	1,44	0,4251	2,20	0,4861	3,60	0,49984
0,70	0,2580	1,46	0,4279	2,22	0,4868	3,80	0,499928
0,72	0,2642	1,48	0,4306	2,24	0,4875	4,00	0,499968
0,74	0,2703	1,50	0,4332	2,26	0,4881	5,00	0,499997

Приложение 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3612	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0100	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 3

Распределение Пуассона.

Значения функции $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

λ / k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001
λ / k	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112	0,01533
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7		0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8					0,00001
λ / k	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,22248
1	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487
2	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462
3	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924
4	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385
5	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062
6	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622	0,16062
7	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445	0,13768
8	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326
9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884
10	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130
11	0,00001	0,00022	0,00193	0,00824	0,02253
12		0,00006	0,00064	0,00343	0,01126
13		0,00001	0,00020	0,00132	0,00520
14			0,00006	0,00047	0,00223
15			0,00002	0,00016	0,00090
16				0,00005	0,00033
17				0,00001	0,00012

Приложение 4

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы	Уровень значимости		(двусторонняя критическая область)			
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2 (Пирсона)

Число степеней свободы	Уровень значимости					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Оглавление

Учебно-методическое издание

Виктория Брониславовна Винокурова,
Лилия Михайловна Пироговская,
Валентина Васильевна Трещева

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой, А.А. Короленок*

Подписано в печать 3.05. 2005 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л. 4,07
Уч.-изд. л. 3.63 Тираж 150 Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19