Федеральное агентство по образованию
Уральский федеральный университет – УРФУ

Р.М. Минькова, Н.В. Чуксина

Векторный анализ в примерах и задачах

для студентов физико-технологического института

Екатеринбург
УРФУ
2013

УДК 514.742.4 (076.1)

Составители Р.М. Минькова, Н.В. Чуксина
Научный редактор доц., канд. физ.- мат. наук Р.М. Минькова

Векторный анализ в примерах и задачах: / сост. Р.М. Минькова, Н.В. Чуксина. Екатеринбург:УРФУ, 2013. 65 с.

В данной работе разбирается решение типовых примеров и задач по следующим темам: функции нескольких переменных, двойные, тройные, криволинейные, поверхностные интегралы, их свойства и применение; скалярное поле, векторное поле и его основные характеристики: векторные линии, поток, линейный интеграл и циркуляция, дивергенция, ротор. Предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Работа предназначена для студентов физико-технологического института.

Библиогр.: 6 назв. Рис. 42.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета.

© Уральский государственный технический университет − УПИ, 2013

Оглавление

1. Функции нескольких переменных……..……..4
1.1. Область определения и график функции ……..4
1.2. Предел и непрерывность функции ….....……..…..…5
1.3. Частные производные …….....……...….....…...…...7
1.4. Дифференцируемые функции…..….....……...…...…...…....9
1.5. Сложные функции и их дифференцирование.....……11
1.6. Неявные функции и их дифференцирование.....13
1.7. Геометрические приложения ….....……...…16
1.8. Локальный экстремум функции ….....……..……..…….....18
1.9. Глобальный экстремум функции.....…....…21
1.10. Условный экстремум функции ……...…..……..….....22
2. Интегралы по фигуре……26
2.1. Определение, свойства…….. ….....…26
2.2. Криволинейный интеграл 1 рода…….....……...28
2.3. Двойной интеграл в прямоугольной системе координат.....……29
2.4. Тройной интеграл в прямоугольной системе координат.....……32
2.5. Двойной интеграл в криволинейной системе координат.....……..35
2.6. Тройной интеграл в криволинейной системе координат….....……38
2.7. Поверхностный интеграл 1рода ….....…..……41
3. Скалярное поле……..43
4. Векторное поле …….....…..…..……..……45
4.1. Векторные линии ……..……..…..…....…45
4.2. Поток векторного поля и его вычисление…..…..……..…...…...47
4.3. Линейный интеграл векторного поля ……..…....……53
4.4. Циркуляция векторного поля .....…56
4.5. Потенциальные, соленоидальные, гармонические поля….....58
4.6. Действия с оператором Гамильтона «набла».....61
Библиографический список……..…….....63

1. Функции нескольких переменных

Переменная u называется функцией k переменных $x_1, x_2, ...x_k$, если каждой совокупности чисел $(x_1, x_2, ...x_k)$ из множества D соответствует единственное значение переменной u. При этом принята запись $u = f(x_1, x_2, ...x_k)$, а множество D называется областью определения функции u.

1.1. Область определения и график функции

Пример 1.1. Найти и изобразить на плоскости XOY область определения функции $z = \ln\left(x^2 + y\right) + \sqrt{x - y - 1}$.

Решение. Так как логарифмическая функция определена только при положительных значениях аргумента, то $x^2 + y > 0$. Функция $\sqrt{x - y - 1}$ имеет смысл при $x - y - 1 \geq 0$. Следовательно, область определения функции $z(x, y)$ есть множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y > -x^2, \\ y \leq x - 1. \end{cases}$

Построим границы области: параболу $y = -x^2$ и прямую $y = x - 1$. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > -x^2$, расположены выше параболы. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leq x - 1$, расположены ниже прямой. Множество таких точек есть область определения функции. Эта область изображена на рис. 1.

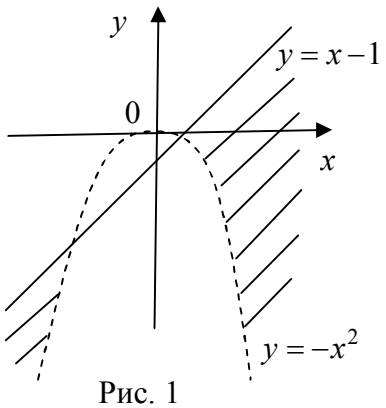

Рис. 1

Пример 1.2. Найти область определения функции

$$z = x\,y + \sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}\,.$$

Решение. Функция xy определена в любой точке плоскости XOY; функция $\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ имеет смысл при $x^2 + y^2 - R^2 \geq 0$, а функция $\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2}}$ – при $\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2} \geq 0$, что выполнимо при $\frac{R^2}{x^2 + y^2} \geq 1$. Таким образом, область определения функции $z(x, y)$ есть множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - R^2 \geq 0 \\ \dfrac{R^2}{x^2 + y^2} \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq R^2 \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x^2 + y^2 = R^2\,.$$

Область определения функции есть линия (окружность с центром в начале координат и радиусом R).

Пример 1.3. Построить график функции $z = \sqrt{4x^2 + 16x + 2y^2 - 4y + 14}$.

Решение. Заметим, что $z \ge 0$ и возведем равенство $z = \sqrt{4x^2 + 16x + 2y^2 - 4y + 14}$ в квадрат. Получим уравнение $z^2 = 4x^2 + 16x + 2y^2 - 4y + 14$ поверхности второго порядка и приведем его к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

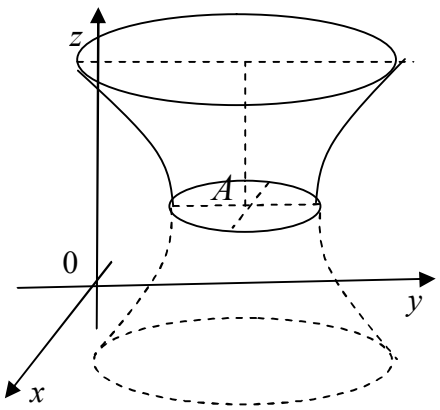

Рис. 2

$$z^2 = 4(x^2 + 4x + 4 - 4) + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 14,$$

$$\text{или } z^2 = 4(x+2)^2 + 2(y-1)^2 - 4.$$

Запишем канонический вид уравнения

$$\frac{(x+2)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad (z \ge 0).$$

Получили верхнюю часть однополостного гиперболоида с центром в точке $A(-2,1,0)$ (рис.2).

1.2. Предел и непрерывность функции

Число b называют пределом функции $u = f(M)$ при $M \to M_0$, если для любой последовательности точек M_n, сходящейся к точке M_0 $(M_n \ne M_0)$, соответствующая последовательность значений функции $f(M_n)$ сходится к числу b, т.е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b \text{, если } f(M_n) \to b \text{ для } \forall M_n \to M_0 \ (M_n \ne M_0).$$

Для функции двух переменных используют и другую запись

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b.$$

Из определения следует, что предел b не зависит от способа приближения точки M к точке M_0.

Многие свойства пределов функции одной переменной остаются справедливыми и для функций многих переменных.

Функцию $f(M)$ называют ***непрерывной*** в точке M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Пример 1.4. Вычислить следующие пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x e^y + 2\cos x}{y e^x + \cos 3y} = \dfrac{0+2}{0+1} = 2$, так как предел элементарной функции в области ее определения равен значению функции в точке;

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sin y \cdot \cos^2 \dfrac{1}{x^2} = 0$, т.к. $\sin y$ есть функция бесконечно малая при $y \to 0$, а функция $\cos^2 \dfrac{1}{x^2}$ есть функция ограниченная и произведение функции беско-

нечно малой на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}=\left[1^{\infty}\right]=\left|\,u=x^2+y^2\,\right|=\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e,$

здесь мы воспользовались вторым замечательным пределом;

4) рассмотрим два способа:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^3}=\left|\,y=kx\,\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\,x^3}{x^4+k^3x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\,x^3}{x^3\left(x+k^3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{\left(x+k^3\right)}=\dfrac{1}{k^2},$

т.е. при приближении точки (x,y) к точке $(0,0)$ по прямым $y=k\,x$ предел функции равен различным значениям в зависимости от значений k и, значит, предел функции не существует;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^3}=\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right|=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^3\left(\rho\cos^4\varphi+\sin^3\varphi\right)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\left(\rho\cos^4\varphi+\sin^3\varphi\right)}=\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi},$

предел функции равен различным значениям в зависимости от значений φ и, значит, не существует;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right|=\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\left(1-\cos\varphi\sin\varphi\right)}=0$, так как произведение бесконечно малой функции $\dfrac{1}{\rho}$ на ограниченную функцию $\dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\left(1-\cos\varphi\sin\varphi\right)}$ есть функция бесконечно малая;

Пример 1.5. Исследовать функции на непрерывность и определить точки разрыва, если таковые имеются: 1) $z=\dfrac{3}{x^2+y^2}$, 2) $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Решение. 1). Функция $z=\dfrac{3}{x^2+y^2}$ элементарная, следовательно, непрерывная во всех точках, кроме точки $(0,0)$, где знаменатель обращается в нуль.

2). Функция $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$ является непрерывной всюду, где $x\neq y$, как элементарная функция. На прямой $y=x$ функция не определена и, значит, разрывна.

Пример 1.6. Доопределить, если возможно, функцию $z=\dfrac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}$ в точке, где она не определена, так, чтобы функция оказалась непрерывной в этой точке.

Решение. Функция $z(x,y)$ определена всюду, кроме точки $(0,0)$. Для непрерывности функции $z(x,y)$ в точке $(0,0)$ следует положить $z(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}z(x,y)$. Поэтому вычислим предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}z(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+\frac{x^3y^3}{x^4+y^4}\right)=\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right|=1+\lim_{\rho\to 0}\rho^2\,\frac{\cos^3\varphi\sin^3\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}=1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что ρ^2 есть функция бесконечно малая при $\rho \to 0$, а функция $\dfrac{\cos^3\varphi \sin^3\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$ ограничена. Полагая $z(0,0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z(x,y)$, получим функцию $z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ непрерывную на всей плоскости XOY.

Примеры для самостоятельного решения

1). Найти и изобразить на плоскости XOY область определения функции

а) $z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$, б) $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}$ $(r<R)$, в) $z = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$.

Ответ: а) $\left\{ \begin{matrix} x \geq 0,\ y \geq 0, \\ y \leq x^2 \end{matrix} \right\}$ — часть плоскости XOY, заключенная между положительной полуосью абсцисс и частью параболы $y = x^2$,

б) $r^2 < x^2+y^2 \leq R^2$ — часть плоскости XOY (кольцо), включая точки внешней окружности $x^2+y^2 = R^2$ и исключая точки внутренней окружности $x^2+y^2 = r^2$.

в) $\left\{ y^2 \leq 4x,\ x^2+y^2 < 1,\ x^2+y^2 \neq 0 \right\}$ — часть плоскости XOY, лежащая внутри параболы $4x = y^2$ между параболой и окружностью $x^2+y^2 = 1$, включая дугу параболы, исключая дугу окружности и точку $(0;0)$.

2). Построить график функции $z = 3 + \sqrt{25-x^2-y^2}$.

Ответ: полусфера $\begin{cases} (z-3)^2 + x^2 + y^2 = 25, \\ z \geq 3 \end{cases}$ радиусом $R = 5$ с центром в точке $(0,0,3)$.

3). Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{1+x^2y}-1}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}$.

Ответ: а) 2; б) 1; у*казание:* использовать второй замечательный предел;

в) $\dfrac{4}{3}$; у*казание:* разложить числитель и знаменатель на множители.

4). Исследовать функции на непрерывность:

а) $z = \dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$, б) $z = \cos\dfrac{1}{x^2+y^2-9}$, в) $z = \dfrac{x}{|y|}$, г) $z = \begin{cases} \sqrt{16-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \leq 16, \\ 0, & x^2+y^2 > 16. \end{cases}$

Ответ: а) линия разрыва $x^2+y^2 = 4$, б) линия разрыва $x^2+y^2 = 9$, в) линия разрыва $y = 0$, г) непрерывна на всей плоскости.

1.3. Частные производные

Частные производные первого порядка

Частными производными $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ функции $f(x,y)$ называются пределы

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x},\quad f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}.$$

Приняты и другие обозначения: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Так как в определении, например, производной f'_x при вычислении $\Delta_x f$ меняется только x при неизменных других переменных, то отсюда вытекает следующее ***правило:***

Чтобы вычислить частную производную от функции f по одному из ее аргументов, нужно вычислить производную функции f по этому аргументу, считая другие аргументы постоянными.

Пример 1.7. Вычислить частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $(1,2)$.

Решение. Вычислим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad z'_x(1,2)=-\frac{2}{5},\quad z'_y(1,2)=\frac{1}{5}.$$

Пример 1.8. Показать, что функция $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ является решением дифференциального уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2.$

Решение. Вычислим частные производные функции $z(x,y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+x}{x^2+xy+y^2}.$$

Подставляя их в левую часть дифференциального уравнения, получим:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2+xy}{x^2+xy+y^2}+\frac{2y^2+xy}{x^2+xy+y^2}=\frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}=2,$$

что и требовалось показать.

Частные производные высших порядков

$$f''_{xx}=\left(f'_x\right)'_x,\quad f''_{xy}=\left(f'_x\right)'_y,\quad f''_{yx}=\left(f'_y\right)'_x,\quad f''_{yy}=\left(f'_y\right)'_y,\quad f'''_{xyx}=\left(f''_{xy}\right)'_x.$$

Другие обозначения этих же производных: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}$.

Производные, в которых идет дифференцирование по различным переменным,

называют смешанными, например, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xyx}. С***мешанная производная***, в случае ее непрерывности, ***не зависит от порядка дифференцирования***, например, $f''_{yx} = f''_{xy}$, $f'''_{yxx} = f'''_{xxy} = f'''_{xyx}$.

Пример 1.9. Проверить равенство $f''_{yx} = f''_{xy}$ для функции $f(x,y) = x^{y^2}$.

Решение.

$f'_x = y^2 x^{y^2-1}$, $f''_{xy} = 2yx^{y^2-1}\left(1+y^2\ln x\right)$, $f'_y = 2yx^{y^2}\ln x$, $f''_{yx} = 2yx^{y^2-1}\left(1+y^2\ln x\right)$.

Пример 1.10. Вычислить $u''_{xx} + u''_{yy}$, если $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Запишем функцию в виде $u = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ и найдем ее производные:

$$u'_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad u''_{xx} = \frac{\left(x^2+y^2\right)-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$u'_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad u''_{yy} = \frac{\left(x^2+y^2\right)-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Показать, что функция $z = x^y \cdot y^x$ удовлетворяет соотношению

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y+\ln z)\cdot z.$$

2). Найти u'''_{xxy}, если $u = x\ln(xy)$. *Ответ:* $u'''_{xxy} = 0$.

1.4. Дифференцируемые функции

Функция двух переменных $f(x,y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке (x,y), если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\boxed{\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + o(\rho)}, \qquad (1.1)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

Из дифференцируемости функции следует ее непрерывность.

В равенстве (1.1) выражение $f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$ называют ***дифференциалом*** функции $f(x,y)$ и обозначают $d\,f(x,y)$. Таким образом,

$\boxed{d\,f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}$, или $\boxed{d\,f(x,y) = f'_x\,d\,x + f'_y\,d\,y}$

Аналогично определяется ***дифференциал функции трех переменных*** $f(x,y,z)$:

$$\boxed{d\,f(x,y,z) = f'_x d\,x + f'_y\,d\,y + f'_z\,d\,z}$$

Из равенства (1.1) следует приближенное равенство:

$$\boxed{f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}. \qquad (1.2)$$

Это равенство позволяет ***линеаризовать*** функцию, т.е. заменить функцию $f(x,y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) ***линейной*** функцией.

Дифференциал функции при фиксированных Δx и Δy есть снова функция от переменных x и y. Ее дифференциал называют ***вторым дифференциалом*** функции $f(x,y)$ и обозначают $d^2 f(x,y)$. Таким образом,

$$d^2 f(x,y) = d\left(d\, f(x,y)\right) \quad \text{при фиксированных } \Delta x, \Delta y.$$

Аналогично, $d^n f(x,y) = d\left(d^{n-1} f(x,y)\right)$ при фиксированных $\Delta x, \Delta y$.

Формулы для вычисления $d^2 f(x,y)$ и $d^n f(x,y)$:

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y).$$

$$d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y).$$

Пример 1.11. Линеаризовать в окрестности точки $A(0,-1)$ функцию

$$z(x,y) = \mathrm{sh}\left(x / y^2\right) + 3^{x^3+y}.$$

Решение. Вычислим значения функции и ее производных z'_x и z'_y в точке $A(0,-1)$:

$$z'_x = \mathrm{ch}\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{y^2} + 3^{x^3+y}\cdot 3x^2 \ln 3, \quad z'_y = \mathrm{ch}\frac{x}{y^2}\cdot\left(-\frac{2x}{y^3}\right) + 3^{x^2+y}\cdot \ln 3,$$

$$z(0,-1) = \frac{1}{3}, \quad z'_x(0,-1) = 1, \quad z'_y(0,-1) = \frac{\ln 3}{3}.$$

Используя формулу $z(x,y) \approx z(x_0,y_0) + z'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$, получим

$$z(x,y) = \mathrm{sh}\frac{x}{y^2} + 3^{x^3+y} \approx \frac{1}{3} + x + \frac{\ln 3}{3}(y+1).$$

Пример 1.12. Найти $d^2 f(2;1)$, если $f(x,y) = \dfrac{x}{x-y}$.

Решение. Воспользуемся формулой $d^2 f = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}\, dxdy + f''_{yy}(dy)^2$;

для этого найдем производные второго порядка функции $f(x,y) = \dfrac{x}{x-y}$:

$$f'_x = \frac{x-y-x}{(x-y)^2} = \frac{-y}{(x-y)^2}, \quad f''_{xx} = \frac{2y}{(x-y)^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{(x-y)^2 + 2y(x-y)}{(x-y)^4} = -\frac{x+y}{(x-y)^3},$$

$$f'_y = \frac{x}{(x-y)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2x}{(x-y)^3}.$$

Вычислим значения производных и второго дифференциала в точке $(2;1)$:

$$f''_{xx}(2;1) = 2, \quad f''_{xy}(2;1) = -3, \quad f''_{yy}(2;1) = 4, \quad d^2 f(2;1) = 2(dx)^2 - 6\,dx\,dy + 4(dy)^2.$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Вычислить дифференциал первого порядка для функции $z = y\sqrt[3]{x}$ в точке $(1,1)$.

2). Линеаризовать функцию $f(x,y)=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{y^2+1}}$ в окрестности точки $A(1,1)$.

3). Найти $d^2f(0,0)$, если $f(x,y)=(1+x)^m\cdot(1+y)^n$.

Ответы: 1) $dz=\dfrac{1}{3}dx+dy$; 2) $f(x,y)=\dfrac{\pi}{4}-(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)$;

3) $d^2f(0,0)=m(m-1)dx^2+2mn\,dxdy+n(n-1)dy^2$.

1.5. Сложные функции и их дифференцирование

Пусть $z=f(x,y)$, причем $x=x(t)$, $y=y(t)$. Тогда суперпозиция этих трех функций, т.е. $z=f\big(x(t),y(t)\big)$ есть ***сложная функция*** одной переменной t. Переменные x, y называют промежуточными переменными, переменную t называют независимой. Если $f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$ − дифференцируемые функции, то производная сложной функции $z=f\big(x(t),y(t)\big)$ равна

$$z'_t=z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t.$$

Справедливо также следующее более общее правило.

Для отыскания производной сложной функции по независимому аргументу надо ее производную по каждому промежуточному аргументу умножить на производную от этого промежуточного аргумента по независимому аргументу и сложить эти произведения.

Пример 1.13. Найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=e^{xy}$, где $y=y(x)$ − произвольная дифференцируемая функция.

Решение. Так как $z=z(x,y)$ и $y=y(x)$, то $z=z\big(x,y(x)\big)$ − сложная функция переменной x, поэтому $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cdot e^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cdot e^{xy}$; тогда $\dfrac{dz}{dx}=y\cdot e^{xy}+x\cdot e^{xy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$.

Пример 1.14. Найти $\dfrac{dz}{dt}$ в точке $M(e,0)$, если $z=\dfrac{y}{x}$, $x=e^t$, $y=\ln t$.

Решение. Вычислим первоначально значение параметра t в точке M, решив систему $\begin{cases}x=e^t=e,\\ y=\ln t=0;\end{cases}$ получим $t=1$. Воспользуемся формулой для вычисления производной сложной функции $z=z(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{dx}{dt}=e^t$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$, то $\dfrac{dz}{dt}=-\dfrac{y}{x^2}\cdot e^t+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{t}$.

В точке $M(e,0)$ получим $\frac{dz}{dt}=0\cdot 1+\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}$.

Пример 1.15. Показать, что функция $u=f(x-at)+g(x+at)$ удовлетворяет уравнению колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если a – постоянно, $f(x,t),\ g(x,t)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Решение. Пусть $x-at=w,\ x+at=v$, тогда $u=f(w)+g(v)$. Вычислим производные первого порядка: $u'_x=f'_w\cdot w'_x+g'_v\cdot v'_x=f'_w+g'_v,\quad u'_t=f'_w\cdot w'_t+g'_v\cdot v'_t=-a\cdot f'_w+a\cdot g'_v$.

Вычислим производные второго порядка:

$$u''_{xx}=\left(f'_w+g'_v\right)'_x=f''_{ww}\cdot w'_x+g''_{vv}\cdot v'_x=f''_{ww}+g''_{vv},$$

$$u''_{tt}=\left(-a\cdot f'_w+a\cdot g'_v\right)'_t=-a\cdot f''_{ww}\cdot w'_t+a\cdot g''_{vv}\cdot v'_t=a^2 f''_{ww}+a^2 g''_{vv}.$$

Сравнивая производные u''_{xx} и u''_{tt}, получим $u''_{tt}=a^2 u''_{xx}$.

Пример 1.16. Найти $z'_x,\ z'_y,\ z''_{yy}$, если $z=f\left(x^2y,\,2x+3y\right)$, где $z=f\left(x^2y,\,2x+3y\right)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

Решение. Данную функцию можно представить в виде: $z=f(u,v)$, где $u=x^2y,\ v=2x+3y$. Для отыскания производных $z'_x,\ z'_y$ воспользуемся формулами:

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x=f'_u\cdot 2xy+f'_v\cdot 2,\quad z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y=f'_u\cdot x^2+f'_v\cdot 3.$$

Найдем z''_{yy}:

$$z''_{yy}=\left(f'_u\cdot x^2+f'_v\cdot 3\right)'_y=\left(f'_u\right)'_y\cdot x^2+\left(f'_v\right)'_y\cdot 3=$$

$$=\left(f''_{uu}\cdot\underbrace{u'_y}_{=x^2}+f''_{uv}\cdot\underbrace{v'_y}_{=3}\right)\cdot x^2+\left(f''_{vu}\cdot\underbrace{u'_y}_{=x^2}+f''_{vv}\cdot\underbrace{v'_y}_{=3}\right)\cdot 3=f''_{uu}\cdot x^4+6f''_{uv}\cdot x^2+9f''_{vv}$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Вычислить частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, где $y=e^{(x+1)^2}$.

2). Найти $\frac{dz}{dt}$ в точке $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, если $z=e^{xy}\ln(x+y),\ x=2\cos t,\ y=2\sin t.$

3). Найти частные производные второго порядка функции $z=f(2x^2-3y),$ где функция f – произвольная дважды дифференцируемая функция.

4). Показать, что функция $z=y\cdot\varphi(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$, если $\varphi(x^2-y^2)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. Найти z''_{xy}.

5). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z = f(u,v)$, где $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$, а $f(u,v)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Ответы: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2 + (x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{y - 2(x+1)^2 e^{(1+x)^2}}{y^2 + (x+1)^2} = \frac{y(1 - 2(x+1)^2)}{y^2 + (x+1)^2}$; 2) 0;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 16x^2 \frac{d^2 f}{du^2} + 4\frac{df}{du}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12x \frac{d^2 f}{du^2}$, $\frac{\partial^2 z}{dy^2} = 9\frac{d^2 f}{du^2}$, где $u = 2x^2 - 3y$;

4) $z''_{xy} = -4xy^2 \varphi''_{uu} + 2x\varphi'_u$, $u = x^2 - y^2$; 5) $z'_x = 2x \cdot f'_u + y e^{xy} \cdot f'_v$, $z'_y = -2y \cdot f'_u + x e^{xy} \cdot f'_v$,

$$z''_{xx} = 4x^2 f''_{uu} + 4xy e^{xy} f''_{uv} + y^2 e^{2xy} f''_{vv} + 2f'_u + y^2 e^{xy} f'_v .$$

1.6. Неявные функции и их дифференцирование

Неявные функции, определяемые уравнением $F(x,y) = 0$

Функция, заданная в виде $y = f(x)$, называется явной функцией. Если же задано уравнение $F(x,y) = 0$, не разрешенное относительно y, то оно определяет функцию $y = y(x)$, заданную неявно, при условии $F'_y \neq 0$.

Если неявная функция $y = y(x)$ задана уравнением $F(x,y) = 0$, то для нахождения производной $y'(x)$ необязательно разрешать уравнение $F(x,y) = 0$ относительно y; следует продифференцировать это уравнение по x, учитывая, что y есть функция от x.

Пример 1.17. Для функции $y(x)$, заданной уравнением $xe^y + ye^x = 2$, найти $y'(0)$, $y''(0)$.

Решение. Уравнение $xe^y + ye^x = 2$ задает $y = y(x)$ как неявную функцию, если $F'_y = xe^y + e^x \neq 0$. Продифференцируем равенство $xe^y + ye^x = 2$ по переменной x два раза, считая $y = y(x)$:

а) $\left(e^y + xe^y y'\right) + \left(y'e^x + ye^x\right) = 0$;

б) $\left(e^y y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y''\right) + \left(y''e^x + y'e^x + y'e^x + ye^x\right) = 0$.

Получим из а) $y'(x) = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$, из б) $y'' = -\frac{2e^y y' + 2e^x y' + xe^y (y')^2 + ye^x}{xe^y + e^x}$.

Если вместо $y'(x)$ подставить его выражение из а), то получим выражение $y''(x)$ только через x и y. Мы этого делать не будем, т.к. нам нужно вычислить $y''(0)$. Найдем первоначально $y(0)$ из заданного равенства:

$0 \cdot e^y + y(0) \cdot e^0 = 2 \Rightarrow y(0) = 2$. Тогда $y'(0) = -\frac{e^2 + 2}{1} = -\left(e^2 + 2\right)$, $y''(0) = 2e^4 + 6e^2 + 2$.

Вторую производную $y''(x)$ можно было найти, дифференцируя равенство $y' = -\dfrac{e^y + y e^x}{x e^y + e^x}$ по x, учитывая, что $y = y(x)$.

Пример 1.18. В окрестности точки $(1,1)$ найти явное выражение для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + xy + y^3 = 3$, используя формулу Тейлора 2-го порядка.

Решение. Для функции $y = y(x)$ формула Тейлора 2-го порядка имеет вид:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Найдем $y'(x)$, дифференцируя уравнение $x^2 + xy + y^3 = 3$ по переменной x, учитывая, что $y = y(x)$:

$$2x + (y + xy') + 3y^2 \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 3y^2},\ y'(1) = -\frac{3}{4}.$$

Для отыскания y'' продифференцируем равенство $y' = -\dfrac{2x + y}{x + 3y^2}$ по x, учитывая, что $y = y(x)$. Получим: $y'' = -\left(\dfrac{2x + y}{x + 3y^2}\right)'_x = -\dfrac{(2 + y')(x + 3y^2) - (2x + y)(1 + 6yy')}{(x + 3y^2)^2}$.

Подставляя в это равенство $x = 1, y = 1, y' = -\frac{3}{4}$, получим $y''(1) = -\frac{31}{32}$. Тогда в окрестности точки $(1,1)$ явное выражение для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + xy + y^3 = 3$, по формуле Тейлора 2-го порядка имеет вид:

$$y(x) = 1 - \frac{3}{4}(x - 1) - \frac{31}{64}(x - 1)^2 + o\left((x - 1)^2\right).$$

Неявные функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ при условии $F'_z \neq 0$ определяет функцию $z = z(x, y)$, заданную неявно.

Для отыскания частной производной z'_x функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, следует продифференцировать это уравнение по x (а для отыскания z'_y продифференцировать уравнение по y), учитывая, что x, y – независимые переменные, а z – функция от x, y.

Пример 1.19. Найти первый дифференциал неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 5$. Линеаризовать в окрестности точки $(1; 1)$ эту неявную функцию, если $z(1; 1) = 1$.

Решение. Вычислим полный дифференциал правой и левой частей уравнения $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 5$:

$$3z^2dz + 6xy\,dx + 3x^2dy + z\,dx + x\,dz + 2yz^2dy + 2y^2z\,dz + dy - 2dx = 0,$$

$$\text{или } (6xy + z - 2)\,dx + (3x^2 + 2yz^2 + 1)\,dy + (3z^2 + x + 2y^2z)\,dz = 0.$$

Разрешая полученное уравнение относительно dz, получим

$$dz = \frac{2 - z - 6xy}{3z^2 + x + 2y^2z}\,dx - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}dy.$$

Заметим, что дроби, стоящие при dx и dy, являются частными производными соответственно $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. В точке $(1;1)$ с учетом того, что $z(1;1) = 1$, получим: $dz(1;1) = -\frac{5}{6}dx - dy = -\frac{5}{6}(x-1) - (y-1)$. Тогда $z(x,y) \approx z(1;1) + dz(1;1)$, т.е.

$$z(x,y) \approx 1 - \frac{5}{6}(x-1) - (y-1).$$

Пример 1.20. Показать, что неявная функция $z = z(x,y)$, определяемая уравнением $F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$, удовлетворяет соотношению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Решение. Уравнение $F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$ определяет неявную функцию $z(x,y)$. Равенство $F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$ представим в виде $F(u,v) = 0$, где $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{z}$. Продифференцируем равенство $F(u,v) = 0$ по x по правилу дифференцирования сложной функции, имея в виду, что $z -$ функция от x, y и $x, y -$ независимые переменные:

$$F'_u \cdot u'_x + F'_v \cdot v'_x = F'_u \cdot \frac{1}{y} + F'_v \cdot \left(-\frac{y}{z^2}z'_x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_x = \frac{F'_u}{F'_v} \cdot \frac{z^2}{y^2}.$$

Аналогично дифференцируя равенство $F(u,v) = 0$ по y, получим

$$F'_u \cdot u'_y + F'_v \cdot v'_y = F'_u \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + F'_v \cdot \frac{z - y\,z'_y}{z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_y = \frac{1}{y} \cdot \left(z - \frac{x\,z^2}{y^2} \cdot \frac{F'_u}{F'_v}\right).$$

Подставим полученные выражения для частных производных в левую часть уравнения: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{F'_u}{F'_v} \cdot \frac{z^2}{y^2} + y \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(z - \frac{x\,z^2}{y^2} \cdot \frac{F'_u}{F'_v}\right) = z$, что и требовалось показать.

Неявные функции, определяемые системой уравнений

1). Система ***двух*** уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ при условии $\frac{D(F,G)}{D(y,z)} \neq 0$ определяет ***две*** функции y, z от переменной x, т.е. $y = y(x)$, $z = z(x)$.

2). Система ***трех*** уравнений $\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = 0, \\ G(x,y,z,u,v) = 0, \\ R(x,y,z,u,v) = 0 \end{cases}$ при условии $\frac{D(F,G,R)}{D(z,u,v)} \neq 0$ определяет ***три*** функции z, u, v от переменных x, y, т.е.

$$z = z(x, y),\ \ u = u(x, y),\ \ v = v(x, y).$$

Пример 1.21. Найти $x'_z,\ y'_z$, если $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} z^2. \end{cases}$

Решение. Система ***двух*** уравнений определяет ***две*** функции, например, $x(z),\ \ y(z)$.

Продифференцируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 2x\,dx + 2y\,dy - z\,dz = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} dx + dy = -dz, \\ 2x\,dx + 2y\,dy = z\,dz. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение сначала на $(-2y)$, а потом на $(-2x)$ и складывая со вторым уравнением, получим:

$$\begin{cases} (2x - 2y)\,dx = (2y + z)\,dz, \\ (2y - 2x)\,dy = (z + 2x)\,dz \end{cases} \Rightarrow \ \frac{dx}{dz} = \frac{2y + z}{2x - 2y}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{z + 2x}{2x - 2y} \quad (y \neq x).$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Найти $dy(0),\ d^2y(0)$ для неявной функции $y(x)$, определенной уравнением $x^3y^2 - xy^2 + 5x + y = 0$. *Ответ:* $dy(0) = -5\,dx,\ \ d^2y(0) = 0$.

2). Найти d^2z в точке $(1,0)$ для неявной функции $z(x, y)$, определяемой уравнением $xz^5 + y^3z - x^3 = 0$, если $z(1,0) = 1$. *Ответ:* $d^2z(1,0) = -\dfrac{6}{25}(dx)^2$.

3). Найти $x'_z,\ y'_z$, если $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$ *Ответ:* $x'_z = \dfrac{y - z}{x - y},\ \ y'_z = \dfrac{z - x}{x - y}$.

1.7. Геометрические приложения

Касательная плоскость и нормаль к поверхности $F(x, y, z) = 0$

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Вектор

$$\boxed{\vec{N} = \left\{ F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0) \right\}}$$

является ***нормальным вектором*** касательной плоскости, проведенной к поверхности в точке касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке M_0:

$$\boxed{F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания, называется нормалью к поверхности. Нормальный вектор касательной плоскости $\vec{N} = \left\{ F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0) \right\}$ является направляющим вектором нормали. Поэтому ***уравнение нормали*** к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке M_0 имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}.$$

Пример 1.22. К поверхности $x^2+2y^2+z^2=5{,}5$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$.

Решение. В данной задаче точка касания $M_0(x_0,y_0,z_0)$ не задана, ее нужно найти. Вычислим нормальный вектор касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-5{,}5$:

$$\vec{N}=\left\{F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0)\right\}=\{2x_0,4y_0,\ 2z_0\}.$$

Нормальный вектор заданной плоскости $x-y+2z=0$: $\vec{N}_1=\{1,-1,\ 2\}$.

Из условия параллельности плоскостей следует, что векторы $\vec{N}$, $\vec{N}_1$ коллинеарны, а значит, их координаты пропорциональны:

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{2z_0}{2}=t,\ \text{или}\ x_0=\frac{t}{2},\ \ y_0=-\frac{t}{4},\ \ z_0=t.$$

Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит на поверхности, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, т.е. $x_0^2+2y_0^2+z_0^2=\frac{t^2}{4}+\frac{2t^2}{16}+t^2=5{,}5$. Отсюда получим $t=\pm2$ и две точки касания $M_0\left(1,-\frac{1}{2},2\right)$, $M_0'\left(-1,\frac{1}{2},-2\right)$. В качестве нормального вектора касательной плоскости возьмем вектор $\vec{N}_1=\{1,-1,\ 2\}$. Запишем уравнения касательных плоскостей:

$$(x-1)-\left(y+\frac{1}{2}\right)+2(z-2)=0\ \ \text{и}\ \ (x+1)-\left(y-\frac{1}{2}\right)+2(z+2)=0.$$

Пример 1.23. Показать, что поверхности $x+2y-\ln z+4=0$ и $x^2-xy-8x+z+5=0$ касаются друг друга (т.е. имеют общую касательную плоскость) в точке $A(2,-3,\ 1)$.

Решение. Убедимся, что точка A принадлежит обеим поверхностям, т.е. координаты точки A удовлетворяют двум заданным уравнениям:

$$2-6-\ln1+4=0,\quad 4+6-16+1+5=0.$$

Обозначим нормальный вектор касательной плоскости к поверхности $x+2y-\ln z+4=0$ через $\vec{N}_1$, а к поверхности $x^2-xy-8x+z+5=0$ через $\vec{N}_2$; тогда

$$\vec{N}_1=\{F_x'(A),\ F_y'(A),\ F_z'(A)\}=\{1,\ 2,-1\},\ \ \vec{N}_2=\{2x-y-8,\ -x,\ 1\}_A=\{-1,-2,\ 1\}.$$

Запишем уравнения касательных плоскостей:

$(x-2)+2(y+3)-(z-1)=0$, или $x+2y-z+5=0$ (для первой поверхности),

$-(x-2)-2(y+3)+(z-1)=0$, или $x+2y-z+5=0$ (для второй поверхности).

Итак, поверхности имеют общую касательную плоскость $x+2y-z+5=0$ в точке A.

Пример 1.24. Показать, что касательная плоскость к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ отсекает на координатных осях отрезки, сумма которых равна a.

Решение. Запишем нормальный вектор касательной плоскости, проведенной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и уравнение касательной плоскости:

$$\vec{N}=\left\{\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}}\right\},\quad \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\ \text{ или }\ \frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a}\ .$$

Найдем отрезки, отсекаемые этой плоскостью на координатных осях:

при $y=z=0$ получим $x=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}$;

при $x=z=0$ получим $y=\sqrt{a}\cdot\sqrt{y_0}$;

при $x=y=0$, получим $z=\sqrt{a}\cdot\sqrt{z_0}$.

Сумма этих отрезков равна

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{y_0}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{z_0}=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a\ .$$

Примеры для самостоятельного решения

1. На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости YOZ.

Ответ: $(-4,2,0),\ (4,-2,0)$.

Указание: учесть, что точка, в которой касательная плоскость параллельна плоскости YOZ, лежит на поверхности.

2. В какой точке нормаль к поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$ образует равные углы с осями координат? *Ответ:* $(\pm 2/3,\pm 8/3,\pm 8/3)$.

Указание: направляющий вектор нормали имеет равные координаты.

1.8. Локальный экстремум функции

Для исследования функции на экстремум нужно

1) найти точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют (их называют критическими точками);
2) исследовать функцию в критических точках, используя достаточные условия экстремума или определение экстремума.

Рассмотрим достаточные условия экстремума.

Первое достаточное условие экстремума функции n переменных

Пусть M_0 критическая точка функции $f(M)$ и функция $f(M)$ дважды дифференцируема в окрестности точки M_0. Тогда

1) если $d^2f(M_0)>0$, то функция $f(M)$ в точке M_0 имеет минимум,

2) если $d^2f(M_0)<0$, то функция $f(M)$ в точке M_0 имеет максимум,

3) если $d^2f(M_0)$ меняет знак, то функция $f(M)$ в точке M_0 экстремума не имеет,
4) если $d^2f(M_0)=0$, то нужно дополнительное исследование (в частности, при $d^3f(M_0)\neq 0$ в точке M_0 экстремума нет).

Второе достаточное условие экстремума функции n переменных

Пусть M_0 – критическая точка функции $f(M)=f(x_1, x_2,...,x_n)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(M_0)=A_{ik}$,

$\Delta_1=A_{11}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$,..., $\Delta_n=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$. Тогда

1) если $\Delta_1, \Delta_2,...,\Delta_n$ – положительны, то M_0 – точка минимума функции $f(M)$;
2) если знаки $\Delta_1, \Delta_2,...,\Delta_n$ чередуются, начиная со знака минус, то M_0 – точка максимума функции $f(M)$.

Замечание. Для функции двух переменных $f(x,y)$ второе достаточное условие экстремума выглядит следующим образом:

1) если $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, то (x_0,y_0) точка минимума функции $f(x,y)$,
2) если $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, то (x_0,y_0) точка максимума функции $f(x,y)$,
3) если $\Delta_2<0$, то функция $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) экстремума не имеет.

Пример 1.25. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+3xy^2-51x-24y$.

Решение. Найдем критические точки функции из условия: $z'_x=0$, $z'_y=0$.

Решим систему $\begin{cases} z'_x=3x^2+3y^2-51=0, \\ z'_y=6xy-24=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ 2xy=8. \end{cases}$

Сложив уравнения, получим $(x+y)^2=25$ или $x+y=\pm 5$.

Решив системы $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=4 \end{cases}$, получим критические точки:

$$M_1(1,4),\ M_2(4,1),\ M_3(-1,-4),\ M_4(-4,-1).$$

Проверим выполнение достаточных условий в этих точках, для этого вычислим производные второго порядка и определитель

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}=36(x^2-y^2).$$

В точках $M_1(1,4)$ и $M_3(-1,-4)$ имеем $\Delta_2=36\cdot(-15)<0$; следовательно, в этих точках экстремума нет.

В точках $M_2(4,1)$ и $M_4(-4,-1)$ имеем $\Delta_2 = 36 \cdot 15 > 0$, экстремум есть, причем в точке $M_2(4,1)$ – минимум, т.к. $\Delta_1 = z''_{xx}(M_2) = 24 > 0$; в точке $M_4(-4,-1)$ – максимум, т.к. $\Delta_1 = -24 < 0$, причем $z_{\min}(4;1) = -152$, $z_{\max}(-4;-1) = 152$.

Пример 1.26. Исследовать на экстремум функцию $z = y^5 - (x-y)^2$.

Решение. Найдем критические точки, решив систему

$$\begin{cases} z'_x = -2(x-y) = 0, \\ z'_y = 5y^4 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = y, \\ 5y^4 = 0. \end{cases}$$

Получим критическую точку $M_0(0,0)$.

Вычислим $z''_{xx} = -2$; $z''_{xy} = 2$; $z''_{yy} = 20y^3 - 2$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 20y^3 - 2 \end{vmatrix} = 4 - 40y^3 - 4 = -40y^3$.

Так как $\Delta_2 = 0$ в точке $M_0(0,0)$, то достаточный признак на вопрос об экстремуме ответа не дает. Исследуем критическую точку на экстремум, используя определение экстремума. Для этого вычислим значение $z(0,0) = 0$ и сравним его со значениями функции $z(x,y)$ в окрестности точки $(0,0)$; в частности, вдоль прямой $y = x$: $z(x,x) = x^5 > 0$ при $x > 0$ и $z(x,x) < 0$ при $x < 0$.

Итак, $z(x,x) > z(0,0)$ при $x > 0$ и $z(x,x) < z(0,0)$ при $x < 0$, следовательно, в точке $(0,0)$ нет экстремума.

Пример 1.27. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^3 - 3xz + 2xy - 2x.$$

Решение. Найдем критические точки функции из условий:

$$\begin{cases} f'_x = 4x - 3z + 2y - 2 = 0, \\ f'_y = 2y + 2x = 0, \\ f'_z = 3z^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений получим

$$\begin{cases} y = -x, \\ x = z^2, \\ 2z^2 - 3z - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 2, \\ z_2 = -\dfrac{1}{2}, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} M_1 = (4,-4,2), \\ M_2 = \left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right). \end{array}$$

Для исследования критических точек на экстремум вычислим определители:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix} = -18 + 24z,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_1 = A_{11} = 4.$$

Так как $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – положительны в точке M_1, то M_1 – точка минимума функции. В точке M_2 имеем $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, поэтому второй достаточный признак на

вопрос об экстремуме ответа не дает. Воспользуемся первым достаточным признаком экстремума; для этого вычислим

$$d^2 f(x,y,z) = f''_{xx}(dx)^2 + f''_{yy}(dy)^2 + f''_{zz}(dz)^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + 2f''_{xz}dx\,dz + 2f''_{yz}dy\,dz =$$

$$= 4(dx)^2 + 2(dy)^2 - 3(dz)^2 + 4\,dx\,dy - 3\,dx\,dz.$$

Если $dx = 0$, то $d^2 f = 2(dy)^2 - 3(dz)^2 = \begin{cases} -(dz)^2, \text{ при } dy = dz, \\ 5(dz)^2, \text{ при } dy = 2\,dz. \end{cases}$.

Так как $d^2 f$ принимает значения разных знаков, то экстремума в точке M_2 нет.

Пример 1.28. Исследовать на экстремум функцию

$$u(x,y,z) = x\,y\,z(4 - 3x - 2y - z) \quad (x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0).$$

Решение. Найдем критические точки функции из условий:

$$\begin{cases} u'_x = y\,z(4 - 3x - 2\,y - z) - 3\,x\,y\,z = 0, \\ u'_y = x\,z(4 - 3x - 2\,y - z) - 2\,x\,y\,z = 0, \\ u'_z = x\,y(4 - 3x - 2\,y - z) - x\,y\,z = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений получим

$$\begin{cases} (4 - 3x - 2\,y - z) = 3x, \\ (4 - 3x - 2\,y - z) = 2\,y, \\ (4 - 3x - 2\,y - z) = z, \end{cases} \Rightarrow 3x = 2\,y = z \Rightarrow (4 - 3x - 3x - 3x) = 3x \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3, \\ y = 1/2, \\ z = 1, \end{cases} \quad M_1(1/3, 1/2, 1).$$

Для исследования критической точки M_1 на экстремум найдем производные второго порядка в этой точке

$$A_{11} = u''_{xx} = -6\,y\,z = -3, \qquad A_{22} = u''_{yy} = -4xz = -4/3, \qquad A_{33} = u''_{zz} = -2\,x\,y = -1/3,$$

$$A_{12} = u''_{xy} = z\underbrace{(4 - 3x - 2\,y - z)}_{=3x} - 2\,y\,z - 3\,x\,z = -2\,y\,z = -1, \qquad A_{21} = u''_{yx} = u''_{xy} = A_{12},$$

$$A_{13} = u''_{xz} = y\underbrace{(4 - 3x - 2\,y - z)}_{=3x} - y\,z - 3\,x\,y = -y\,z = -1/2, \qquad A_{31} = u''_{zx} = u''_{xz} = A_{13},$$

$$A_{23} = u''_{yz} = x\underbrace{(4 - 3x - 2\,y - z)}_{=z} - x\,z - 2\,x\,y = -2\,x\,y = -1/3, \qquad A_{32} = u''_{zy} = u''_{yz} = A_{23}.$$

Вычислим определители

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1/2 \\ -1 & -4/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -1/2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4/3 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_1 = -3.$$

Так как знаки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ чередуются, начиная со знака минус, то M_1 – точка максимума функции $u(M)$.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Ответы: 1) $z_{\min}(2,1) = -28$, $z_{\max}(-2,-1) = 28$, в точках $(1,2)$ и $(-1,-2)$ экстремума нет;

2) $u_{\min} = u(-2/3, -1/3, 1) = -4/3$.

1.9. Глобальный экстремум функции

Требуется найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции не в окрестности точки (локальный экстремум), а в некоторой ограниченной замкнутой области (глобальный экстремум). Наибольшее (наименьшее) значение функции в такой области может достигаться либо внутри области в точках локального экстремума (а значит, в критических точках), либо на границе области.

Поэтому алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(M)$ в области D состоит в следующем:

1) найти критические точки функции $f(M)$, принадлежащие области D, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;
3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Пример 1.29. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2\,y(4-x-y)$ в области $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 6$.

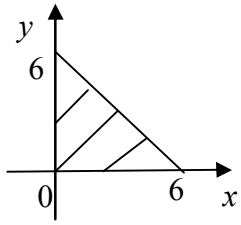

Рис.4

Решение. 1). Построим область (рис.4). Найдем критические точки функции $z(x,y)$ ***внутри области***, решив систему:

$$\begin{cases} z_x' = x\,y(8-3x-2y) = 0, \\ z_y' = x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-3x-2y=0, \\ 4-x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases} \quad z(2,1)=4.$$

2). Исследуем функцию ***на границе***. На участках границы области, где $x=0,\ y=0,$ функция $z = x^2\,y(4-x-y)$ равна нулю: $z(0,y)=0,\ \ z(x,0)=0$. На участке границы области, где $x+y=6,$ функция равна $z = -2x^2(6-x) = -12x^2+2x^3 = f(x)$. Найдем критические точки функции $f(x)$ на интервале $(0,\,6)$:

$$f'(x) = -24x+6x^2 = 0 \ \Rightarrow\ x=4;\ \ z(4,2) = f(4) = -64.$$

Тогда наибольшее значение функции есть $z=4$, оно достигается в точке $(2,1)$; наименьшее значение есть $z=-64$, оно достигается на границе области в точке $(4,\,2)$.

Пример 1.30. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{-x^2-y^2}\left(2x^2+3y^2\right)$ в круге $x^2+y^2 \le 4$.

Решение. 1). Найдем критические точки функции в круге:

$$\begin{cases} z'_x = e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(2x^2+3y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\cdot 4x = 2x\,e^{-x^2-y^2}\left(2-2x^2-3y^2\right) = 0, \\ z'_y = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(2x^2+3y^2\right) + e^{-x^2-y^2}\cdot 6y = 2y\,e^{-x^2-y^2}\left(3-2x^2-3y^2\right) = 0; \end{cases}$$

отсюда получим системы $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ 3-2x^2-3y^2=0, \end{cases} \begin{cases} y=0, \\ 2-2x^2-3y^2=0 \end{cases}$

и критические точки $M_1(0,0),\ \ M_2(0,\pm 1),\ M_3(\pm 1,0)$.

Эти точки лежат в заданном круге и $z(0,0)=0,\ z(0,\pm1)=3e^{-1},\ z(\pm1,0)=2e^{-1}$.

2). На границе области имеем $x^2+y^2=4$, поэтому функция z примет вид: $z=e^{-x^2-y^2}\left(2x^2+3y^2\right)=e^{-4}\left(8+y^2\right),\ y\in[-2,2]$. Так как $y^2\in[0,4]$, то на границе наименьшее значение $z=8e^{-4}$ при $y=0$, наибольшее значение $z=12e^{-4}$ при $y=\pm2$.

3). Из получившихся значений функции

$$z(0,0)=0;\ z(0,\pm1)=3e^{-1};\ z(\pm1,0)=2e^{-1};\ z(\pm2,0)=8e^{-4};\ z(0,\pm2)=12e^{-4}$$

выберем наибольшее значение $z=\frac{3}{e}$ и наименьшее значение $z=0$.

1.10. Условный экстремум функции

Рассмотрим экстремум функции нескольких переменных, когда эти переменные связаны некоторыми условиями – уравнениями связи. Для отыскания условного экстремума используют два метода.

Сведение к безусловному экстремуму

Пусть требуется найти экстремум функции $u=f(x,y,z)$ при наличии связи $F(x,y,z)=0$. Если ***из уравнения связи легко выразить одну из переменных***, например z, через две другие переменные $z=\varphi(x,y)$, то задача сведется к поиску безусловного экстремума функции $u=f\left(x,y,\varphi(x,y)\right)$.

Пример 1.31. Найти параллелепипед данного объема V, имеющий наименьшую площадь поверхности S.

Решение. Обозначим линейные размеры параллелепипеда через x,y,z. Тогда объем $V=xyz$, а площадь поверхности $S=2xy+2xz+2yz$. Требуется найти минимум функции $S=2xy+2xz+2yz$, при условии, что $V=xyz$. Из уравнения связи выразим z: $z=\frac{V}{xy}$ и подставим в функцию S: $S=2xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}$. Найдем критические точки этой функции из системы:

$$\begin{cases} S'_x == 2y-\dfrac{2V}{x^2}=0, \\ S'_y == 2x-\dfrac{2V}{y^2}=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y=V, \\ xy^2=V, \end{cases} \Rightarrow\ x=y=\sqrt[3]{V}.$$

Проверим выполнение достаточных условий для функции $S=2xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}$ в полученной критической точке $M\left(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}\right)$:

$$A=S''_{xx}=\frac{4V}{x^3}\Big|_M=4,\ B=S''_{xy}=2,\ C=S''_{yy}=\frac{4V}{y^3}\Big|_M=4;\ \Rightarrow\ \Delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12.$$

Так как $A>0,\ \Delta>0$, то функция имеет минимум, причем $S_{\text{мин}}=6\sqrt[3]{V^2}$.

Метод множителей Лагранжа

Этот метод применяется, когда из уравнений связи трудно или невозможно

выразить одни переменные через другие. Изложим алгоритм этого метода.

Для отыскания условного экстремума функции $f(x,y,z)$ при наличии связей $F(x,y,z,)=0$, $G(x,y,z,)=0$ нужно:

1) составить вспомогательную функцию Лагранжа Φ следующим образом:

$$\Phi = f(x,y,z)+\lambda\cdot F(x,y,z)+\mu\cdot G(x,y,z);$$

2) найти ее критические точки из системы уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\ F(x,y,z,)=0,\ G(x,y,z,)=0;$$

3) исследовать критические точки на экстремум, исходя из геометрических или физических соображений или знака $d^2\Phi$.

Пример 1.32. В полушар радиусом R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Решение. Пусть точка $M(x,y,z)$ принадлежит полусфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\ge 0)$. Тогда высота вписанного в полушар параллелепипеда равна аппликате z, стороны основания равны $2x$, $2y$, объем $V=4xyz$. Требуется найти максимум функции $V(x,y,z)=4xyz$ при условии, что $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\ge 0)$. Составим функцию Лагранжа: $\Phi(x,y,z,\lambda)=4xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)$. Найдем ее критические точки, решив систему

$$\begin{cases}\Phi_x'=4yz+2\lambda x=0,\\ \Phi_y'=4xz+2\lambda y=0,\\ \Phi_z'=4xy+2\lambda z=0,\end{cases}\ \Rightarrow\ -\lambda=\frac{2yz}{x}=\frac{2xz}{y}=\frac{2xy}{z}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}y^2=x^2,\\ y^2=z^2,\end{matrix}\ \Rightarrow\ x=y=z.$$

Подставив в уравнение связи $x^2+y^2+z^2=R^2$, получим $3z^2=R^2$, $z=\frac{R}{\sqrt{3}}$. Точка $M\left(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума (т.к. $V_{\min}=0$ при $z=0$), при этом $V_{\max}=V\left(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4R^3}{3\sqrt{3}}$.

Пример 1.33. Найти оси эллипса $5x^2+8xy+5y^2=9.$

Решение. При замене (x,y) на $(-x,-y)$ уравнение эллипса не меняется, т.е. эллипс симметричен относительно начала координат и центром эллипса является точка $O(0,0)$. Чтобы найти оси эллипса $2a$ и $2b$, необходимо найти расстояние $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ от точки $M(x,y)$ эллипса до точки $O(0,0)$ и исследовать функцию $d(x,y)$ или, что удобнее, $d^2(x,y)$ на экстремум. Итак, решаем методом множителей Лагранжа задачу: исследовать на экстремум функцию $d^2(x,y)=x^2+y^2$ при условии $5x^2+8xy+5y^2=9$.

Составим функцию Лагранжа: $\Phi(x,y,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2}+\lambda\left(5x^2+8xy+5y^2-9\right)$, найдем

ее критические точки, решив систему:

$$\begin{cases} \Phi_x' = 2x + \lambda(10x + 8y) = 0, \\ \Phi_y' = 2y + \lambda(8x + 10y) = 0, \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda\,(5x + 4y), \\ y = -\lambda\,(4x + 5y), \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9. \end{cases}$$

Поделив первое уравнение на второе, получим $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5x + 4y}{4x + 5y}$ или $4x^2 = 4y^2,\ y = \pm x$.

Рассмотрим первоначально случай $y = x$. Подставляя $y = x$ в уравнение связи $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$, получим $18x^2 = 9,\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Аналогично для случая $y = -x$: $5x^2 - 8x^2 + 5x^2 = 9,\ 2x^2 = 9,\ x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ y = \mp\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Вычислим значения функции $d(x, y)$ в полученных точках:

$$d\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad d\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \mp\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3.$$

Ясно, что $d = 1$ является малой полуосью эллипса, $d = 3$ - большой полуосью эллипса. Тогда оси эллипса соответственно равны 2 и 6.

Пример 1.34. Найти наибольшее и наименьшее расстояния от плоскости XOY до поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + yz = 1$.

Решение. Рассмотрим на заданной поверхности произвольную точку $M(x, y, z)$. Расстояние от этой точки до плоскости XOY равно $|z|$. Исследуем на экстремум не функцию $|z|$, а более простую функцию z, при условии, что точка $M(x, y, z)$ принадлежит заданной поверхности, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности. Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi = z + \lambda\left(x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + yz - 1\right).$$

Найдем ее критические точки, решив систему:

$$\begin{cases} \Phi_x' = 2\lambda(x + y) = 0, \\ \Phi_y' = \lambda(4y + 2x + z) = 0, \\ \Phi_z' = 1 + \lambda(2z + y) = 0, \\ x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + yz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ 2(x + y) + 2y + z = 0, \\ (x + y)^2 + y^2 + z^2 + yz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ z = -2y, \\ y^2 + 4y^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ z = \mp\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ и наибольшее расстояние от плоскости XOY до заданной поверхности равно $|z| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Наименьшее расстояние до плоскости XOY равно нулю, например, для точки поверхности с координатами $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$.

Примеры для самостоятельного решения

1). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6 - 4x - 3y$ в области $x^2 + y^2 \le 1$. *Ответ:* $z_{\min} = z(4/5, 3/5) = 1,\ \ z_{\max} = z(-4/5, -3/5) = 11$.

2). На параболе $2x^2-4yx+2y^2-x-y=0$ найти точку A, ближайшую к прямой $9x-7y+16=0$. *Ответ:* $A(3;5)$.

3). Найти параллелепипед данной площади поверхности S, имеющий наибольший объем V. *Ответ:* куб.

4). На плоскости $x+y-2z=0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от плоскостей $x+3z=6$, $y+3z=2$ была бы наименьшей. *Ответ:* $M(3,-1,1)$.

5). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2y^2-8x$ в области $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 3$. *Ответ:* $z_{\text{наиб}}=z(0,0)=0,\ z_{\text{наим}}=z(0,3)=-18$.

2. Интегралы по фигуре

2.1. Определение, свойства

Определение интеграла по фигуре

Если существует при $d\to 0$ предел интегральной суммы функции $f(P)$ по фигуре (Φ), не зависящий от способа разбиения фигуры и выбора точек P_k, то этот предел называют ***интегралом функции*** $f(P)$ ***по фигуре*** (Φ)**:**

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\Phi_k .$$

Свойства интеграла по фигуре

1. Свойство линейности

$$\int\limits_{(\Phi)}\left(\lambda\cdot f(P)+\mu\cdot g(P)\right)d\Phi=\lambda\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi+\mu\int\limits_{(\Phi)} g(P)\,d\Phi ,$$

где λ и μ – константы.

2. Свойство аддитивности

Пусть фигура (Φ) разбита (рис. 5) на части (Φ_1) и (Φ_2). Тогда

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi=\int\limits_{(\Phi_1)} f(P)\,d\Phi+\int\limits_{(\Phi_2)} f(P)\,d\Phi .$$

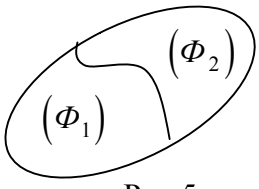

Рис.5

3. О вычислении меры фигуры

Мера Φ фигуры (Φ) вычисляется по формуле $\Phi=\int\limits_{(\Phi)} d\Phi$.

В частности, мы имеем формулы для отыскания длины l дуги (l), площади S плоской области (S), площади σ поверхности (σ), объёма V тела (V):

$$l=\int\limits_{(l)} dl,\qquad S=\int\limits_{(S)} dS,\qquad \sigma=\int\limits_{(\sigma)} d\sigma,\qquad V=\int\limits_{(V)} dV .$$

4. Об интегрировании неравенств

Если $f(P)\le g(P)$ на фигуре (Φ), то $\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi\le\int\limits_{(\Phi)} g(P)\,d\Phi$.

5. Об оценке интеграла

$$m \cdot \Phi \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi \le M \cdot \Phi,$$

где m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ на фигуре (Φ).

6. Об оценке модуля интеграла

$$\left| \int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi \right| \le \int\limits_{(\Phi)} |f(P)|\, d\Phi.$$

7. Теорема о среднем

Пусть функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ). Тогда на (Φ) существует точка $\tilde{P}$ такая, что

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi = f\left(\tilde{P}\right) \cdot \Phi \quad \text{или} \quad f\left(\tilde{P}\right) = \frac{1}{\Phi} \int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi.$$

Значение $f\left(\tilde{P}\right)$ из теоремы о среднем называют средним значением функции $f(P)$ на фигуре (Φ) и обозначают $f_{\text{ср}}$. Оно используется в прикладных задачах.

Пример 2.1. Оценить интеграл $\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$, где (D) – квадрат $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

Решение. В квадрате (D) оценим подынтегральную функцию:

$$0 \le x^2 + y^2 \le 2 \quad \Rightarrow \quad -2 \le -x^2 - y^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-2} \le e^{-x^2-y^2} \le e^0.$$

Поэтому по свойству 5) имеем:

$$e^{-2} \cdot S \le \iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \le e^0 \cdot S.$$

Здесь S есть площадь квадрата (D), $S = 1$. Окончательно получим:

$$e^{-2} \le \iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \le 1.$$

Механические приложения интеграла по фигуре

1. Вычисление массы фигуры

Пусть известна плотность распределения масс $\gamma(P)$. Тогда масса фигуры (Φ)

$$m = \int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)\, d\Phi.$$

2. Отыскание центра тяжести фигуры

$$x_c = \frac{1}{m} \int\limits_{(\Phi)} x \cdot \gamma(P)\, d\Phi, \quad y_c = \frac{1}{m} \int\limits_{(\Phi)} y \cdot \gamma(P)\, d\Phi, \quad z_c = \frac{1}{m} \int\limits_{(\Phi)} z \cdot \gamma(P)\, d\Phi.$$

3. Вычисление моментов инерции фигуры

$$I_{XOY}=\int\limits_{(\Phi)} z^2\cdot\gamma(P)\,d\Phi,\qquad I_{XOZ}=\int\limits_{(\Phi)} y^2\cdot\gamma(P)\,d\Phi,\qquad I_{YOZ}=\int\limits_{(\Phi)} x^2\cdot\gamma(P)\,d\Phi;$$

$$I_{OX}=\int\limits_{(\Phi)} (y^2+z^2)\cdot\gamma(P)\,d\Phi,\quad I_{OY}=\int\limits_{(\Phi)} (x^2+z^2)\cdot\gamma(P)\,d\Phi,\quad I_{OZ}=\int\limits_{(\Phi)} (x^2+y^2)\cdot\gamma(P)\,d\Phi;$$

$$I_0=\int\limits_{(\Phi)} (x^2+y^2+z^2)\cdot\gamma(P)\,d\Phi.$$

2.2. Криволинейный интеграл I рода

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\quad y=y(t)$, $z=z(t),$ где $t\in[\alpha,\beta]$, $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt.$$

Если плоская кривая (L) задана уравнением $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, то

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl=\int\limits_{a}^{b} f\big(x,\ y(x)\big)\cdot\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx.$$

Если плоская кривая (L) задана уравнением $x=x(y),\quad y\in[c,d]$, то

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl=\int\limits_{c}^{d} f\big(x(y),\ y\big)\cdot\sqrt{1+(x_y')^2}\,dy.$$

Пример 2.2. Найти момент инерции относительно OY участка однородной линии $y=\ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(2,\ln 2)$.

Решение. Линия (L) задана уравнением $y=\ln x,\quad x\in[1,2]$, поэтому

$$dl=\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx,$$

$$I_{OY}=\int\limits_{(L)} x^2\,dl=\int\limits_{1}^{2} x^2\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int\limits_{1}^{2} x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\sqrt{x^2+1}\,d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}\Big|_1^2=\frac{5^{3/2}-2^{3/2}}{3}.$$

Пример 2.3. Вычислить массу дуги кривой $x=\frac{2}{3}y^{3/2},\ y\in[0,3]$, если плотность $\gamma=1+y$.

Решение. Кривая задана уравнением $x=x(y)$, поэтому

$$dl=\sqrt{1+\left(x_y'\right)^2}\,dy=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}\,dy=\sqrt{1+y}\,dy.$$

Массу дуги кривой вычислим по формуле

$$m=\int\limits_{(L)}\gamma\,dl=\int\limits_{0}^{3}(1+y)\sqrt{1+y}\,dy=\int\limits_{0}^{3}(1+y)^{3/2}\,dy=\frac{2}{5}(1+y)^{5/2}\Big|_0^3=\frac{62}{5}.$$

Пример 2.4. Вычислить длину дуги линии $x=\int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}dz, y=\int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}dz$ от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

Решение. Для кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$L=\int\limits_{(L)} dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Вычислим: $x_t'=\left(\int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}dz\right)_t'=\frac{\cos t}{t}$, $y_t'=\left(\int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}dz\right)_t'=\frac{\sin t}{t}$, $\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y'\right)_t^{\,2}}=\frac{1}{t}$.

Найдем значения параметра, соответствующие началу координат и точке с ближайшей к нему вертикальной касательной. В начале координат $x=\int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}dz=0$, $y=\int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}dz=0$, что возможно при $t_0=1$. Угловой коэффициент касательной $k=y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{t\cdot\sin t}{t\cdot\cos t}=\operatorname{tg} t$. Для вертикальной касательной $k=\infty$ при $t_1=\frac{\pi}{2}$. Тогда $L=\int_1^{\pi/2}\frac{dt}{t}=\ln t\,\big|_1^{\pi/2}=\ln\frac{\pi}{2}$.

Пример 2.5. Найти момент инерции относительно начала координат однородной линии (L): $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ y=x.\end{cases}$

Решение. Момент инерции относительно начала координат найдем по формуле

$$I_0=\int_{(L)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma dl.$$

Линия *(L)* есть линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и плоскости $y=x$. Подставив в уравнение сферы x вместо y, получим уравнение линии *(L)* в виде:

$$\begin{cases}2x^2+z^2=R^2,\\ y=x\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\left(\sqrt{2}x\right)^2+z^2=R^2,\\ y=x.\end{cases}$$

Запишем уравнение линии в виде $\sqrt{2}x=R\cos t,\quad z=R\sin t,\quad y=x$ или

$$x=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t,\quad y=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t,\quad z=R\sin t,\quad t\in[0,2\pi].$$

Тогда $dl=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}\,dt=\sqrt{\frac{R^2}{2}\sin^2 t+\frac{R^2}{2}\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\;dt=R\,dt$.

Итак, $I_0=\int\limits_0^{2\pi}R^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\cdot\gamma R\,dt=R^3\gamma\cdot t\,\Big|_0^{2\pi}=2\pi\gamma R^3$.

2.3. Двойной интеграл в прямоугольной системе координат

Пусть область (D) в плоскости XOY ограничена линиями $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$ ($\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ на $[a,b]$). Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Чтобы вычислить данный интеграл, необходимо:

1) построить область интегрирования;
2) записать двойной интеграл через повторный;
3) в повторном интеграле сначала расставить внутренние пределы интегрирования: от $y=\varphi_1(x)$ на нижней линии до $y=\varphi_2(x)$ на верхней линии;
4) проецируя область (S) на ось OX, расставить внешние пределы интегрирования (это всегда – числа, а не функции);
5) вычислить внутренний интеграл при постоянном x, затем – внешний интеграл.

Пусть область (D) в плоскости XOY ограничена линиями $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, $y=c$, $y=d$ ($g_1(y)\le g_2(y)$ на $[c,d]$). Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Чтобы воспользоваться этой формулой рекомендуем:

1) построить область интегрирования;
2) записать двойной интеграл через повторный;
3) в повторном интеграле сначала расставить внутренние пределы интегрирования: от $x=g_1(y)$ на левой линии до $x=g_2(y)$ на правой линии;
4) проецируя область (S) на ось OY, расставить внешние пределы интегрирования;
5) вычислить внутренний интеграл при постоянном y, затем – внешний интеграл.

Пример 2.6. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в интеграле $I=\iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$, если область интегрирования – круговой сектор OAB, где $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

Решение. Запишем уравнения линий, ограничивающих область (D). Прямая (OA) имеет уравнение $y=x$, прямая (OB) – уравнение $y=-x$, дуга AB – часть окружности с уравнением $x^2+y^2=2$.

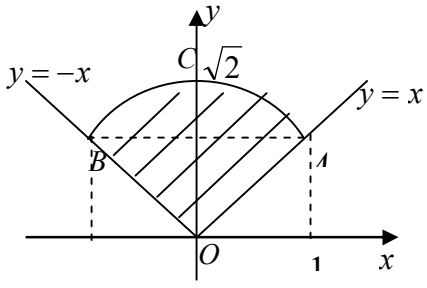

Рис. 6

1). Из уравнения окружности выразим y: $y=\sqrt{2-x^2}$, так как $y\ge 0$. При переходе от двойного интеграла к повторному сначала расставим внутренние пределы интегрирования. Так как снизу область (D) ограничена двумя линиями (рис. 6), то придется разбить данный интеграл на два интеграла, пользуясь свойством аддитивности:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(BOC)} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{(AOC)} f(x,y)\,dxdy.$$

Область (BOC) снизу ограничена линией $y=-x$, сверху – линией $y=\sqrt{2-x^2}$, $-1\le x\le 0$.

Область (AOC) снизу ограничена линией $y=x$, сверху – линией $y=\sqrt{2-x^2}$, $0\le x\le 1$.

Таким образом, $I=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$.

2). Запишем теперь повторный интеграл, сменив порядок интегрирования. Слева область (D) ограничена двумя линиями: отрезком OB $(x=-y)$ и дугой BC $\left(x=-\sqrt{2-y^2}\right)$. Справа область (D) также ограничена двумя линиями: отрезком OA $(x=y)$ и дугой AC $\left(x=\sqrt{2-y^2}\right)$. Поэтому разобьем интеграл на два интеграла.

По свойству аддитивности $\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(AOB)}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{(BAC)}f(x,y)dxdy$.

Область (AOB) слева ограничена линией $x=-y$, справа – линией $x=y$, причем $0\le y\le 1$. Область (BAC) слева ограничена линией $x=-\sqrt{2-y^2}$, справа – линией $x=\sqrt{2-y^2}$, причем $1\le y\le\sqrt{2}$. Таким образом,

$$I=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-y}^{y}f(x,y)dx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx.$$

Пример 2.7. Найти площадь области (D), ограниченной линиями

$$y=-2x,\ y=2-x,\ y=\sqrt{x}.$$

Решение. Построим область (D) (рис. 7), найдем точки пересечения кривых: $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-2,4)$. Для вычисления площади области (D) воспользуемся формулой

$$S=\iint\limits_{(D)}ds=\iint\limits_{(OBC)}dx\,dy+\iint\limits_{(OAC)}dx\,dy.$$

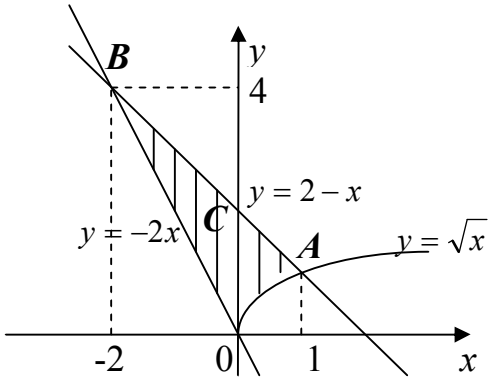

Рис. 7

Каждый двойной интеграл запишем через повторный, расставим пределы интегрирования и вычислим:

$$S=\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{-2x}^{2-x}dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x}dy=\int\limits_{-2}^{0}\left(y\Big|_{-2x}^{2-x}\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(y\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}(2+x)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(2-x-\sqrt{x}\right)dx=\frac{(2+x)^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{17}{6}.$$

Пример 2.8. Вычислить $\iint\limits_{(D)}y^2\cos\frac{xy}{2}dx\,dy$, если область (D) ограничена линиями $x=0,\quad y=\sqrt{2\pi},\quad y=x$.

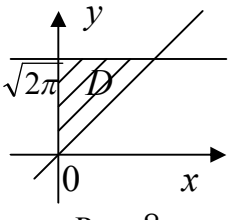

Рис. 8

Решение. Построим данную область (рис. 8). Запишем двойной интеграл через повторный двумя способами:

$$\iint\limits_{(D)} y^2\cos\frac{xy}{2}dx\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}}dx\int\limits_x^{\sqrt{2\pi}}y^2\cos\frac{xy}{2}dy,\qquad \iint\limits_{(D)} y^2\cos\frac{xy}{2}dx\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}}dy\int\limits_0^{y}y^2\cos\frac{xy}{2}dx.$$

В первом способе при вычислении интеграла $\int y^2\cos\frac{xy}{2}dy$ придется дважды воспользоваться формулой интегрирования по частям, что не очень удобно. Во втором способе интеграл $\int y^2\cos\frac{xy}{2}dx$ вычисляется просто. Поэтому воспользуемся вторым способом:

$$\iint\limits_{(D)} y^2\cos\frac{xy}{2}dx\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}}y^2\,dy\int\limits_0^{y}\cos\frac{xy}{2}dx=\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}}\left(y^2\cdot\frac{2}{y}\sin\frac{xy}{2}\Big|_{x=0}^{x=y}\right)dy=\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}}2y\cdot\sin\frac{y^2}{2}dy=$$

$$=2\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{y^2}{2}d\left(\frac{y^2}{2}\right)=-2\cos\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2\pi}}=-2\cos\pi+2\cos 0=4\,.$$

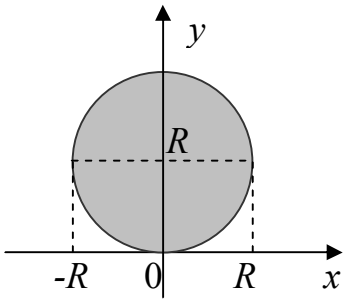

Рис. 9

Пример 2.9. Найти статический момент однородного круга относительно его касательной.

Решение. Введем систему координат таким образом, чтобы одна из координатных осей, например OX, являлась касательной к кругу (рис. 9). Уравнение соответствующей окружности имеет вид: $x^2+(y-R)^2=R^2$. Теперь наша задача – найти статический момент круга относительно оси OX. Так как фигура однородная, то плотность $\gamma=const$ и

$$S_{OX}=\iint\limits_{(D)} y\cdot\gamma\,dx\,dy=\gamma\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy\,.$$

При расстановке пределов интегрирования воспользуемся тем, что верхняя часть окружности задается уравнением $y=R+\sqrt{R^2-x^2}$, нижняя часть – уравнением $y=R-\sqrt{R^2-x^2}$, где $x\in[-R,R]$. Поэтому имеем:

$$S_{OX}=\gamma\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy=\gamma\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2}}y\,dy=\gamma\int\limits_{-R}^{R}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx=$$

$$=2\gamma R\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=2\gamma R\cdot\frac{S_{кр}}{2}=\pi R^3\gamma\,.$$

2.4. Тройной интеграл в прямоугольной системе координат

Пусть тело (V) ограничено поверхностями снизу $z=z_1(x,y)$, сверху $z=z_2(x,y)$, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_{(V_{XY})}dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz\,, \qquad (2.1)$$

где (V_{XY}) – есть проекция тела (V) на плоскость XOY.

Чтобы применить эту формулу на практике, рекомендуем:

1) построить тело (V);
2) записать тройной интеграл через повторный интеграл;
3) в повторном интеграле сначала расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z: от $z_1(x,y)$ на нижней поверхности до $z_2(x,y)$ на верхней поверхности;
4) вычислить внутренний интеграл при фиксированных x, y;
5) вычислить внешний интеграл по проекции тела (V) на плоскость XOY.

Пусть тело (V) ограничено поверхностями $y = y_1(x,z)$, $y = y_2(x,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OY. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{XZ})} dxdz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy. \qquad (2.2)$$

Пусть тело (V) ограничено поверхностями $x = x_1(y,z)$, $x = x_2(y,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OX. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{YZ})} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx. \qquad (2.3)$$

Пример 2.10. Вычислить момент инерции I_{XZ} относительно плоскости XOZ однородного тела (V), ограниченного поверхностями $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad z = 10(3x + y),\quad x + y = 1$.

Решение. Снизу тело ограничено плоскостью $z = 0$, сверху – плоскостью $z = 10(3x + y)$, сбоку – цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси OZ (рис. 10), поэтому можно воспользоваться формулой (2.1). При расстановке пределов интегрирования в двойном интеграле учтем, что проекция тела (V_{XY}) на плоскость XOY – треугольник, ограниченный прямыми $y = 1 - x,\ y = 0,\ x = 0$. Учтем также, что плотность $\gamma = const$. Тогда

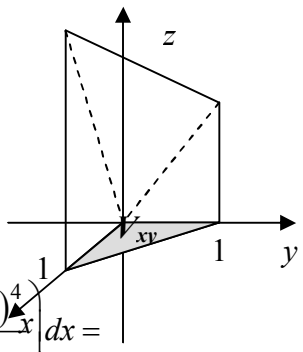

Рис. 10

$$I_{XZ} = \iiint\limits_{(V)} y^2\gamma\,dx\,dy\,dz = \gamma \iint\limits_{(V_{XY})} y^2 dx\,dy \int\limits_0^{10(3x+y)} dz = 10\gamma \iint\limits_{(V_{XY})} y^2(3x+y)\,dx\,dy =$$

$$= 10\gamma \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(3xy^2 + y^3\right) dy = 10\gamma \int\limits_0^1 \left(xy^3 + \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx = 10\gamma \int\limits_0^1 \left(x(1-x)^3 + \frac{(1-x)^4}{4} \right) dx =$$

$$= 10\gamma \left(-\frac{x(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^4\,dx \right) = 10\gamma \left(-\frac{x(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1 - \frac{(1-x)^5}{10}\Bigg|_0^1 \right) = \gamma.$$

Пример 2.11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x = 3z^2 - 2,\quad x = -4z^2 + 5,\quad y = 4 - x^2 - 9z^2,\quad y = 1 - 7x^2 - 9z^2.$$

Решение. Справа тело ограничено поверхностью $y = 4 - x^2 - 9z^2$ (параболоид), слева – поверхностью $y = 1 - 7x^2 - 9z^2$, сверху и снизу – цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси OY. Здесь удобнее спроецировать тело на плоскость OXZ, поэтому воспользуемся формулой (2.2). Тогда

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(V_{XZ})} dx\,dz \int\limits_{1-7x^2-9z^2}^{4-x^2-9z^2} dy = \iint\limits_{(V_{XZ})} \left(3 + 6x^2\right) dx\,dz .$$

Построим проекцию тела на плоскость OXZ (рис. 11). Найдем точки пересечения парабол:

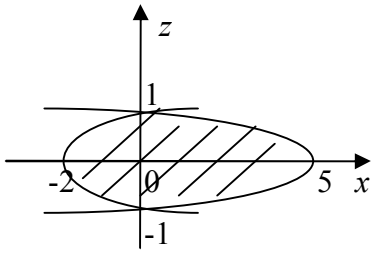

Рис. 11

$$\begin{cases} x = 3z^2 - 2, \\ x = -4z^2 + 5, \end{cases} \Rightarrow 3z^2 - 2 = -4z^2 + 5, \Rightarrow z = \pm 1 .$$

Расставим пределы интегрирования:

$$V = \iint\limits_{(V_{XZ})} \left(3 + 6x^2\right) dx\,dz = \int\limits_{-1}^{1} dz \int\limits_{3z^2-2}^{5-4z^2} \left(3 + 6x^2\right) dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(3x + 2x^3\right)\Big|_{3z^2-2}^{5-4z^2} dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(287 - 693z^2 + 588z^4 - 182z^6\right) dz = 2\left(287z - 231z^3 + \frac{588}{5}z^5 - 26z^7\right)\Big|_0^1 = \frac{1476}{5} .$$

Пример 2.12. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x = 2y^2, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad z = 0 .$$

Решение. Сверху тело ограничено плоскостью $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$, снизу – плоскостью $z = 0$, сбоку – цилиндрической поверхностью $x = 2y^2$ с образующими, параллельными оси OZ (рис. 12). Поэтому

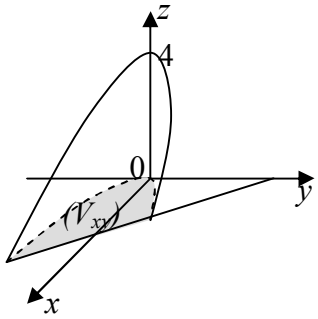

Рис. 12

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(V_{XY})} dx\,dy \int\limits_{0}^{4-2y-x} dz = \iint\limits_{(V_{XY})} \left(4 - 2y - x\right) dx\,dy .$$

Найдем линию пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow x = 4 - 2y .$$

Проекция (V_{XY}) ограничена прямой $x = 4 - 2y$ и параболой $x = 2y^2$ (рис. 13). Они пересекаются, если $4 - 2y = 2y^2 \Rightarrow$ $y_1 = -2,\ y_2 = 1$. Таким образом, имеем:

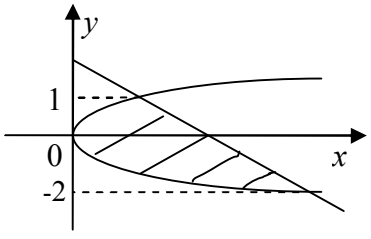

Рис. 13

$$V = \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{2y^2}^{4-2y} \left(4 - 2y - x\right) dx = \int\limits_{-2}^{1} \left(\left(4 - 2y\right)x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{2y^2}^{4-2y} dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(\frac{\left(4-2y\right)^2}{2} - 8y^2 + 4y^3 + 2y^4\right) dy = \left(-\frac{\left(4-2y\right)^3}{12} - \frac{8}{3}y^3 + y^4 + \frac{2}{5}y^5\right)\Big|_{-2}^{1} = 16,2 .$$

2.5. Двойной интеграл в криволинейной системе координат

Для вычисления двойного интеграла иногда удобно использовать не прямоугольные координаты (x,y), а некоторые другие координаты (u,v), которые часто называют криволинейными. Пусть известна связь между прямоугольными и криволинейными координатами

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v).$$

Будем предполагать, что якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy$ следует заменить $x, y, dxdy$ на их выражения в криволинейной системе координат

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv\ .$$

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S^*)} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv, \qquad (2.4)$$

где (S^*) есть область изменения переменных (u,v).

Замечание. Иногда удобнее вычислить не якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = I$, а якобиан $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = I_1$ и учесть, что $I = \dfrac{1}{I_1}$ (по аналогии с производной обратной функции $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$).

Пример 2.13. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100.$$

Решение. Перейдем к криволинейным координатам следующим образом: $u = x - 2y + 3,\ \ v = 3x + 4y - 1$. Тогда уравнение линии в новой системе координат примет вид $u^2 + v^2 = 100$. Таким образом, получили уравнение окружности в плоскости Ouv.

Вычислим якобиан $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$. Тогда $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{10}$ и, воспользовавшись формулой (2.4), получим:

$$S = \int\limits_{(D)} ds = \iint\limits_{(D)} dx\,dy = \iint\limits_{(D_1)} \frac{1}{10}\,du\,dv = \frac{1}{10} S_{\text{круга}} = \frac{1}{10}\cdot 100\pi = 10\pi\ .$$

Пример 2.14. Найти массу однородной фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 2y,\ \ x^2 = 3y,\ \ x^3 = y^2,\ \ x^3 = 4y^2$.

Решение. Введем криволинейные координаты: $u=\dfrac{x^2}{y},\quad v=\dfrac{x^3}{y^2}$.

Заметим, что переменные связаны соотношением $\dfrac{v}{u}=\dfrac{x}{y}$.

В новой системе координат фигура ограничена линиями $u=2$, $u=3$, $v=1$, $v=4$ (рис. 14). Вычислим якобианы

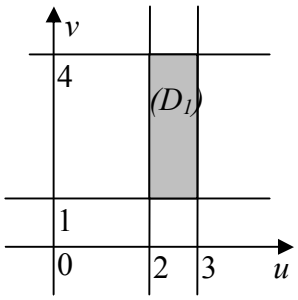

Рис. 14

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\\ \dfrac{3x^2}{y^2} & -\dfrac{2x^3}{y^3}\end{vmatrix}=-\frac{x^4}{y^4}=-\frac{v^4}{u^4},\qquad \frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{u^4}{v^4}.$$

Так как фигура однородная, то $\gamma=const$. По формуле (2.4) имеем

$$m=\iint\limits_{(D)}\gamma\,dx\,dy=\gamma\iint\limits_{(D_1)}\left|-\frac{u^4}{v^4}\right|du\,dv=\gamma\int\limits_2^3 u^4\,du\int\limits_1^4\frac{dv}{v^4}=\gamma\left(\frac{u^5}{5}\Big|_2^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3v^3}\Big|_1^4\right)=\frac{4431}{320}\gamma\ .$$

Двойной интеграл в полярной системе координат

Полярные координаты являются одними из наиболее употребительных криволинейных координат.

Пусть область (S) заключена (рис. 15) между лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ и ограничена линиями с уравнениями $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$. Тогда имеет место формула

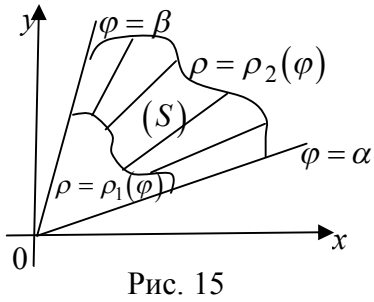

Рис. 15

$$\int\limits_{(S)}f(P)\,dS=\iint\limits_{(S)}f(\rho,\varphi)\,\rho\ d\rho\,d\varphi=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\ .$$

Чтобы применять на практике эту формулу, рекомендуем:

1) построить область интегрирования;

2) в двойном интеграле $\int\limits_{(S)}f(P)\,dS=\int\limits_{(S)}f(x,y)\,dS$ заменить x, y, dS, на их выражения в полярной системе координат, т.е. $dS=\rho\,d\rho\,d\varphi$, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$;

3) записать двойной интеграл через повторный;
в повторном интеграле сначала расставить пределы изменения ρ при фиксированном φ, т.е. на луче, выходящем из полюса (рис. 15); на нем ρ меняется от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$;

4) расставить внешние пределы интегрирования, определив лучи $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, между которыми заключена фигура (внешние пределы всегда числа, а не функции);

5) вычислить внутренний интеграл при постоянном φ, затем – внешний интеграл.

Замечания

Если уравнение границы содержит $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, то удобно перейти к обобщенным полярным координатам $x = a\cdot\rho\cos\varphi,\quad y = b\cdot\rho\sin\varphi$; тогда $dS = ab\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi$.

Пример 2.15. Найти массу пластины, ограниченной линиями $\rho = 1,\quad \rho = 2\sin\varphi$, содержащей точку с декартовыми координатами $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, если плотность $\gamma = |x|$.

Решение. Построим соответствующую область. Линия $\rho = 1$ есть окружность с центром в начале координат радиуса 1. Линию $\rho = 2\sin\varphi$ можно построить по точкам, составив таблицу:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
ρ	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0

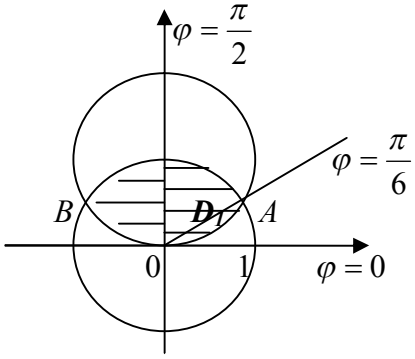

Рис. 16

Другой способ построения линии $\rho = 2\sin\varphi$ следующий: умножим ее уравнение на ρ и перейдем к декартовым координатам: $\rho^2 = 2\rho\sin\varphi \;\Rightarrow\; x^2+y^2 = 2y \;\Rightarrow\; x^2+(y-1)^2 = 1$.

Получили окружность с центром, смещенным по оси OY, радиуса 1 (рис. 16).

Так как фигура симметрична относительно оси OY и плотность $\gamma = |x|$ одинакова для первой и второй четверти, то удобно вычислить массу m_1 фигуры (D_1), расположенной в первой четверти, учитывая, что там $\gamma = |x| = x = \rho\cos\varphi$. Тогда масса всей пластины

$$m = 2m_1,\quad m_1 = \int\limits_{(D_1)} \gamma\, ds = \iint\limits_{(D_1)} \rho\cos\varphi\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi .$$

Вычислим угол φ_1, соответствующий точке A пересечения окружностей:

$$\rho = 1,\ \rho = 2\sin\varphi \;\Rightarrow \sin\varphi = 1/2 \Rightarrow \varphi_1 = \pi/6 .$$

Фигура (D_1) ограничена линией $\rho = 2\sin\varphi$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ и линией $\rho = 1$ при $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, поэтому двойной интеграл запишем в виде двух повторных интегралов:

$$m_1 = \iint\limits_{(D_1)} \cos\varphi\cdot\rho^2\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/6} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho^2 d\rho + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/6} \sin^3\varphi\cdot\cos\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{3}\sin\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{5}{24}.$$

Таким образом, $m = 2m_1 = 5/12$.

Пример 2.16. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$\rho = a\cos 5\varphi,\ a > 0 .$$

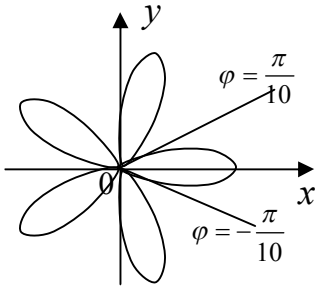

Рис. 17

Решение. Так как $\rho \ge 0$, то $\cos 5\varphi \ge 0$, значит

$$5\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right];\quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5};\ \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}\right], n \in \mathrm{Z}.$$

Период функции $\cos 5\varphi$ равен $T = 2\pi/5$, следовательно, фигура состоит из 5 одинаковых по площади «лепестков» (рис. 17). Поэтому вычислим площадь S_1 одного «лепестка», для которого $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{10};\ \frac{\pi}{10}\right]$:

$$S_1 = \int\limits_{(D)} ds = \int\limits_{-\pi/10}^{\pi/10} d\varphi \int\limits_0^{a\cos 5\varphi} \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi/10}^{\pi/10} \cos^2 5\varphi\, d\varphi = a^2 \int\limits_0^{\pi/10} \cos^2 5\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/10} (1+\cos 10\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{10}\sin 10\varphi\right)\Big|_0^{\pi/10} = \frac{a^2\pi}{20}.$$

Следовательно, $S = 5S_1 = a^2\pi/4$.

Пример 2.17. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4$, $y=\frac{3}{2}x$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, если плотность $\gamma = \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$.

Решение. Фигура ограничена двумя прямыми и двумя эллипсами (рис. 18), поэтому удобно использовать обобщенные полярные координаты $x = 2\rho\cos\varphi$, $y = 3\rho\sin\varphi$.

Тогда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = \rho^2$, $dS = 6\rho\, d\rho\, d\varphi$, $\gamma = \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} = \rho$, а уравнения линий примут вид:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho=1; \qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2$$

$$y=\frac{3}{2}x \Rightarrow 3\rho\sin\varphi = \frac{3}{2}\cdot 2\rho\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow 3\rho\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\rho\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

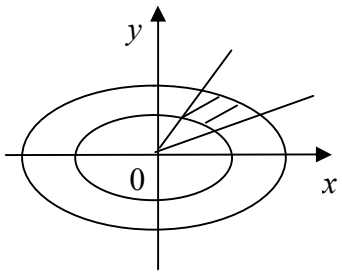

Рис.18

Поэтому $m = \int\limits_{(D)} \gamma\, dS = \iint\limits_{(D)} \rho\cdot 6\ \rho\, d\rho\, d\varphi = 6\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{7\pi}{6}$.

2.6. Тройной интеграл в криволинейной системе координат

Тройной интеграл в цилиндрической системе координат

В цилиндрической системе координат положение точки M в пространстве однозначно определяется тройкой чисел ρ, φ, z, где ρ, φ – полярные координаты проекции точки M на плоскость OXY, z – аппликата точки M.

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)\, dV = \int\limits_{(V)} f(x,y,z)\, dV$ следует заменить x, y, z, dV на их выражения в цилиндрической системе координат,

$$x = \rho\cdot\cos\varphi,\ y = \rho\cdot\sin\varphi,\ z = z,\quad dV = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz\ ;$$

Замечания

1). К цилиндрическим координатам целесообразно переходить, когда уравнения поверхностей, ограничивающих тело, содержат x^2+y^2.

2). Если уравнение поверхности, ограничивающей область, содержит $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, то удобно перейти к обобщенным цилиндрическим координатам

$$x=a\cdot\rho\cos\varphi,\quad y=b\cdot\rho\sin\varphi,\quad z=z;\ \text{тогда}\quad dV=ab\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

3). Внутреннее интегрирование обычно удобно вести по z.

Пример 2.18. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=4,\quad \frac{x^2}{4}+y^2=3z.$$

Решение. Уравнение $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=4$ задает эллипсоид, а уравнение $\frac{x^2}{4}+y^2=3z$ – параболоид (рис.19). Перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам:

$$x=2\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z\ \Rightarrow\ dV=2\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

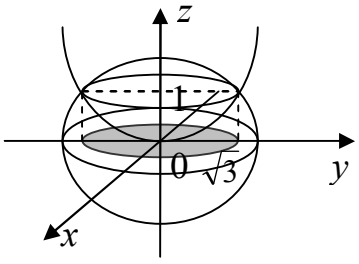

Рис. 19

Уравнение параболоида $\frac{x^2}{4}+y^2=3z$ примет вид $z=\rho^2/3$;

уравнение эллипсоида $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=4$ примет вид $z^2=4-\rho^2$

или $z=+\sqrt{4-\rho^2}$ для верхней части сферы. Поэтому

$$V=\int\limits_{(V)}dV=\iint\limits_{(V_{XY})}2\rho\,d\rho\,d\varphi\int\limits_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=\iint\limits_{(V_{XY})}2\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)d\rho\,d\varphi.$$

Для отыскания проекции (V_{XY}) тела на плоскость OXY найдем линию пересечения поверхностей:

$$\begin{cases}z=\sqrt{4-\rho^2},\\ z=\rho^2/3,\end{cases}\ \Rightarrow\ \sqrt{4-\rho^2}=\rho^2/3\ \Rightarrow\ 4-\rho^2=\rho^4/9\ \Rightarrow\ \rho^2=3,\ \rho^2=-12\ \Rightarrow\ \rho=\sqrt{3}.$$

Итак, проекция (V_{XY}) ограничена линией $\rho=\sqrt{3}$ (рис. 19). Поэтому

$$V=\iint\limits_{(V_{XY})}2\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}2\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left(-\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-\rho^2}\,d\left(4-\rho^2\right)-\frac{2}{3}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho^3d\rho\right)=2\pi\left(-\frac{2}{3}\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{\rho^4}{6}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)=\frac{19\pi}{3}.$$

Пример 2.19. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=x,\quad x^2+y^2=2x,\quad z=x^2+y^2,\quad z=0,\quad x+y=0,\quad x-y=0.$$

Решение. Запишем уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат:

$$\rho^2=\rho\cos\varphi,\ \ \rho^2=2\rho\cos\varphi,\ \ z=\rho^2,\ \ z=0,\ \ \rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi=0,\ \ \rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi=0$$

или после преобразования

$$\rho=\cos\varphi,\ \ \rho=2\cos\varphi,\ \ z=\rho^2,\ \ z=0,\ \ \varphi=\frac{\pi}{4},\ \ \varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

Проекция тела на плоскость OXY изображена на рис. 20.

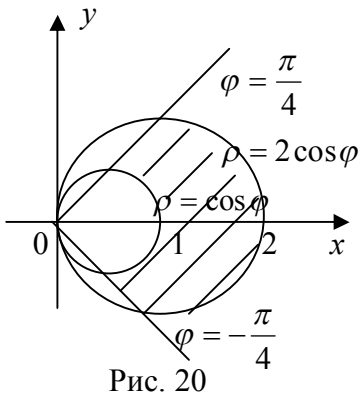

Рис. 20

Найдем объем тела:

$$V=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho\int\limits_{0}^{\rho^2}dz=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho^3\,d\rho=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\rho^4}{4}\Big|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{15}{4}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(\frac{3}{2}+2\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{15}{8}\cdot\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin2\varphi+\frac{1}{8}\sin4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{45\pi}{64}+\frac{15}{8}.$$

Тройной интеграл в сферической системе координат

Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве можно охарактеризовать с помощью сферических координат (r,θ,φ), где r – длина радиус-вектора точки M (рис. 21), θ – угол отклонения радиус-вектора точки M от оси OZ $(0\le\theta\le\pi)$, φ – угол отклонения от оси OX проекции на плоскость XOY радиус-вектора точки M $(0\le\varphi\le2\pi)$.

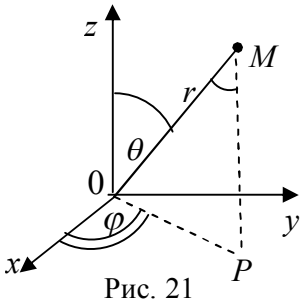

Рис. 21

Связь между прямоугольными и сферическими координатами:

$$x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ \ y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ \ z=r\cdot\cos\theta;\qquad x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Элемент объема в сферических координатах

$$dV=dxdydz=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Рекомендации

1). К сферическим координатам целесообразно переходить, когда тело ограничено сферой $r=const$, конусом $\theta=const$ или поверхностью, уравнение которой содержит $x^2+y^2+z^2$.

2). Наиболее удобен порядок интегрирования (слева направо) по φ, θ, r.

3). Сначала расставить пределы интегрирования по r (двигаясь по лучу из начала координат), потом – по θ (двигаясь от оси OZ), потом – по φ.

Пример 2.20. Найти момент инерции однородного шара относительно касательной плоскости.

Решение. Введем систему координат таким образом, чтобы касательная плоскость совпала с координатной плоскостью OXY, а центр сферы находился на оси OZ (рис. 22). Уравнение сферы: $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ или $x^2+y^2+z^2=2Rz$, где R – радиус сферы.

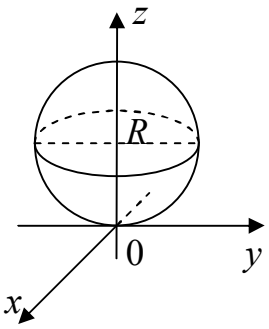

Рис. 22

В сферической системе координат, учитывая, что $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z=r\cdot\cos\theta$, уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=2Rz$ примет вид $r^2=2Rr\cos\theta$ или $r=2R\cos\theta$, где $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le2\pi$. Так как $\gamma=const$, $z=r\cdot\cos\theta$, $dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$, то

$$I_{XY}=\int\limits_{(V)}z^2\gamma\,dV=\gamma\iiint\limits_{(V)}r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}r^4\,dr=$$

$$=\frac{-32R^5\gamma}{5}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^7\theta\;d(\cos\theta)=-\frac{32R^5\gamma}{5}\cdot2\pi\cdot\left(\frac{\cos^8\theta}{8}\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{8R^5\gamma\pi}{5}.$$

2.7. Поверхностный интеграл I рода

Вычисление поверхностного интеграла I рода $\int\limits_{(\sigma)}f(x,y,z)d\sigma$ сводится к вычислению двойного интеграла по проекции поверхности (σ) на одну из координатных плоскостей.

Если поверхность (σ) задана уравнением $z=z(x,y)$, то

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy,\quad\int\limits_{(\sigma)}f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{XY})}f\left(x,y,z(x,y)\right)\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy.$$

Если поверхность (σ) задана уравнением $x=x(y,z)$, то

$$d\sigma=\sqrt{1+x_z'^2+x_y'^2}\,dydz,\quad\int\limits_{(\sigma)}f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{YZ})}f\left(x(y,z),y,z\right)\cdot\sqrt{1+x_z'^2+x_y'^2}\,dydz.$$

Если поверхность (σ) задана уравнением $y=y(x,z)$, то

$$d\sigma=\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz,\quad\int\limits_{(\sigma)}f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{XZ})}f\left(x,y(x,z),z\right)\cdot\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz.$$

Пример 2.21. Найти площадь части поверхности $z=x^2+y^2$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=2$ (внутри цилиндра).

Решение. Уравнение поверхности $z=x^2+y^2$ разрешено относительно z, поэтому найдем $d\sigma$ по формуле:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

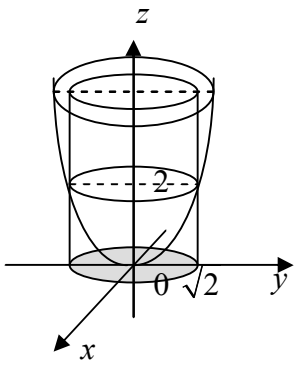

Рис. 23

Тогда $\sigma = \int\limits_{(\sigma)} d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$, где проекция (σ_{XY}) поверхности (σ) на плоскость XOY есть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2$ (рис. 23), поэтому для вычисления двойного интеграла перейдем к полярной системе координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi;\quad \sqrt{1+4x^2+4y^2}=\sqrt{1+4\rho^2};$$

$$x^2+y^2=2\ \Rightarrow\ \rho=\sqrt{2},\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Тогда $\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} \sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,d\rho =$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{8}\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\,d\left(1+4\rho^2\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}(27-1) = \frac{13\pi}{3}.$$

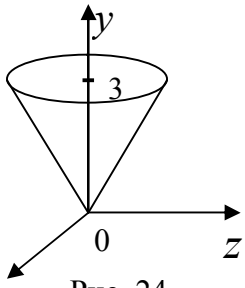

Рис. 24

Пример 2.22. Найти момент инерции относительно плоскости XOZ однородной поверхности $z^2+x^2=y^2$, $(0\le y\le 3)$, если $\gamma=const$.

Решение. Построим поверхность $z^2+x^2=y^2$ методом сечений. В сечении $x=0$ получим $z^2=y^2$ или $z=\pm y$. Это – пара прямых в плоскости YOZ (рис. 24). В сечении $y=3$ получим окружность $z^2+x^2=3^2$. Таким образом, уравнение $z^2+x^2=y^2$ определяет коническую поверхность. Момент инерции поверхности найдем с помощью поверхностного интеграла:

$$I_{xoz} = \int\limits_{(\sigma)} \gamma\,y^2\,d\sigma = \gamma\int\limits_{(\sigma)} y^2\,d\sigma.$$

Для вычисления этого интеграла уравнение поверхности удобно разрешить относительно y: $y=\sqrt{x^2+z^2}$. Найдем y'_x, y'_z, и затем $d\sigma$:

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+z^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},\quad y'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dxdz = \sqrt{2}\,dxdz.$$

Теперь вычислим $I_{xoz}=\gamma\int\limits_{(\sigma)} y^2\,d\sigma$, подставляя значение $y^2=x^2+z^2$ на поверхности и значение $d\sigma=\sqrt{2}\,dxdz$:

$$I_{xoz} = \gamma\int\limits_{(\sigma)} y^2\,d\sigma = \gamma\iint\limits_{(\sigma_{xz})} \left(x^2+z^2\right)\cdot\sqrt{2}\,dxdz.$$

Здесь (σ_{xz}) есть проекция конической поверхности (σ) на плоскость XOZ, т.е. круг радиусом 3 (рис. 24). Двойной интеграл по кругу удобнее вычислять в полярной системе координат. Для этого заменим x^2+z^2 на ρ^2, а $dxdz$ на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Получим

$$I_{xoz} = \gamma\iint\limits_{(\sigma_{xz})} \left(x^2+z^2\right)\sqrt{2}\,dxdz = \gamma\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma_{xz})} \rho^3 d\rho d\varphi = \gamma\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 \rho^3 d\rho = \gamma\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^3 d\varphi = \frac{81\pi\gamma\sqrt{2}}{2}.$$

3. Скалярное поле

Множество точек поля, в которых функция поля $f(x,y,z)$ принимает постоянное значение C, образует поверхность с уравнением $f(x,y,z)=C$, называемую ***поверхностью уровня*** поля. Если скалярное поле плоское и находится, например, в плоскости XOY, то его функция поля $f(x,y)$ зависит от двух переменных x и y, а множество точек, в которых $f(x,y)=C$, образует ***линию уровня***.

Производная поля по направлению и градиент

Производную поля $f(M)$ по направлению $\vec{l}$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\frac{\partial f(M)}{\partial l}=\operatorname{grad} f(M)\cdot\vec{l}_0},$$

где $\operatorname{grad} f(M)=\left\{f'_x(M),\ f'_y(M),\ f'_z(M)\right\}$ – градиент скалярного поля $f(M)$, $\vec{l}_0=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ – единичный вектор направления $\vec{l}$.

Свойства производной по направлению и градиента

1). Скорость изменения функции $f(M)$ в точке M_0 в направлении $\vec{l}$ равна $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)$.

2). Поле $f(M)$ в точке M_0 в направлении $\vec{l}$ возрастает (соответственно, убывает) тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)\ge 0$ (соответственно, $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)\le 0$).

3). Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего возрастает в направлении вектора $\operatorname{grad} f(M_0)$ со скоростью, равной $\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$.

4). Вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0.

5). $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$, $\operatorname{grad}(u\cdot v)=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u$, $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}$,

$\operatorname{grad} f(u)=f'_u\cdot\operatorname{grad}u$, $\operatorname{grad}r=\dfrac{\vec{r}}{r}$, $\operatorname{grad}(\vec{r},\vec{a})=\vec{a}$ $(\vec{a}-$*постоянный вектор*$)$.

Пример 3.1. Построить линии уровня поля $f(x,y)=\dfrac{16-y^2}{x^2}$. Найти производную поля в точке $M_0\left(2;\,2\sqrt{3}\right)$ в направлении касательной и в направлении нормали к линии уровня поля, проходящей через точку M_0.

Решение. Линия уровня есть множество точек, в которых скалярная функция имеет одно и то же значение: $\dfrac{16-y^2}{x^2}=C,\ x\ne 0$. Если $C=0$, то $16-y^2=0$; получаем две прямые $y=4$ и $y=-4$ (рис. 25).

Если $C>0$ $\left(C=a^2\right)$, то $16-y^2=a^2x^2$ или $\dfrac{x^2}{16/a^2}+\dfrac{y^2}{16}=1$ – это уравнение эллипса с

центром в начале координат; в частном случае при $C=1$ получаем уравнение окружности $x^2+y^2=16$. Точка $M_0\left(2;\,2\sqrt{3}\right)$ принадлежит этой окружности.

Если $C<0$ $\left(C=-a^2\right)$, то $\dfrac{16-y^2}{x^2}=-a^2$ или $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{16/a^2}=1$ – уравнение сопряженной гиперболы.

Найдем векторы $\operatorname{grad} f=\left\{f'_x,\,f'_y\right\}=\left\{-\dfrac{2\left(16-y^2\right)}{x^3},-\dfrac{2y}{x^2}\right\}$, $\operatorname{grad} f\left(M_0\right)=\left\{-1;-\sqrt{3}\right\}$.

Для вычисления производной поля в точке M_0 по направлению нормали к линии $x^2+y^2=16$ воспользуемся свойствами 3), 4):

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial n}=\left|\operatorname{grad} f\left(M_0\right)\right|=\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2.$$

Для вычисления производной поля по направлению касательной к линии $x^2+y^2=16$ запишем уравнение линии в параметрическом виде: $x=4\cos t,\ y=4\sin t$. В точке $M_0\left(2;\,2\sqrt{3}\right)$ $4\cos t_0=2,\ 4\sin t_0=2\sqrt{3}\ \Rightarrow t_0=\pi/3$. Найдем направляющий вектор касательной и производную поля по направлению касательной

$$\vec{\tau}=\left\{x'(t),y'(t)\right\}_{t=t_0}=\left\{-4\sin t,4\cos t\right\}_{t=t_0}=\left\{-2\sqrt{3},2\right\},\quad \vec{\tau}_0=\frac{\vec{\tau}}{\left|\vec{\tau}\right|}=\left\{\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right\},$$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial \tau}=\operatorname{grad} f\left(M_0\right)\cdot\vec{\tau}_0=\left\{-1;-\sqrt{3}\right\}\cdot\left\{\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right\}=0,$$

то есть поле по направлению касательной к линии $x^2+y^2=16$ в точке M_0 не меняется.

Пример 3.2. Показать, что линии уровня полей $u=2x^2+y^2$ и $v=\dfrac{y^2}{x}$ ортогональны.

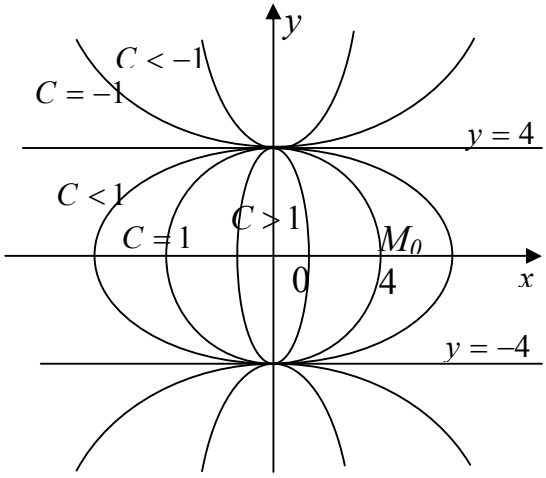

Рис. 25

Решение. Угол между линиями измеряется углом между касательными к этим линиям в точке пересечения. Угол между касательными совпадает с углом между нормалями (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Так как $\operatorname{grad} f\left(M\right)$ направлен по нормали к линии уровня, то угол между линиями уровня полей $u(M),\ v(M)$ есть угол между $\operatorname{grad} u\left(M_0\right)=\left\{4x_0,\,2y_0\right\}$ и $\operatorname{grad} v\left(M_0\right)=\left\{-\dfrac{{y_0}^2}{{x_0}^2},\,\dfrac{2y_0}{x_0}\right\}$, где $M_0\left(x_0,\,y_0\right)$ – точка пересечения линий уровня.

Вычислим скалярное произведение градиентов:

$$\left(\operatorname{grad} u\left(M_0\right),\operatorname{grad} v\left(M_0\right)\right)=-4x_0\cdot\frac{{y_0}^2}{{x_0}^2}+4\cdot\frac{{y_0}^2}{x_0}=0,$$

т.е. $\operatorname{grad} u(M_0) \perp \operatorname{grad} v(M_0)$ и линии уровня полей $u(M)$, $v(M)$ ортогональны.

Пример 3.3. Найти наибольшую скорость изменения поля $u = \ln^2 r$, где $r = |\vec{r}|$.

*Решение. Н*аибольшая скорость изменения поля u равна $|\operatorname{grad} u|$. По свойствам градиента имеем:

$$\operatorname{grad} u(r) = u'_r \cdot \operatorname{grad} r = u'_r \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \left(\ln^2 r\right)' \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 2\ln r \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \frac{2\ln r}{r}.$$

4. Векторное поле

4.1. Векторные линии векторного поля

Одной из характеристик векторного поля являются ***векторные линии***.

Векторной линией векторного поля называют линию, в каждой точке которой касательный вектор коллинеарен вектору поля (рис. 26).

Для векторного поля $\vec{a} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ векторные линии отыскиваются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

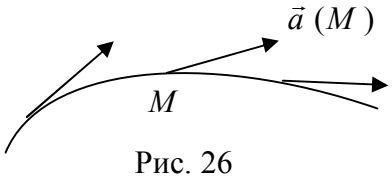

Рис. 26

При решении таких уравнений бывает полезно использовать следующее свойство пропорций:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}.$$

Пример 4.1. Найти векторные линии поля вектора

$$\vec{a} = (z - y) \cdot \vec{i} + (x - z) \cdot \vec{j} + (y - x) \cdot \vec{k}.$$

Решение. Запишем дифференциальные уравнения векторных линий этого поля:

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

Учитывая свойство пропорций, домножим числитель и знаменатель первой дроби на x, второй – на y, третьей – на z и, сложив почленно, получим

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(xz - xy) + (xy - zy) + (yz - xz)} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}.$$

Отсюда $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$, $\frac{1}{2} d\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$ или $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$.

Теперь запишем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \underbrace{\frac{dz}{y - x} = \frac{dx + dy}{-y + x}} \quad \Rightarrow \frac{dz}{y - x} = \frac{dx + dy}{-y + x} \Rightarrow -dz = dx + dy \Rightarrow -z + C_2 = x + y.$$

Таким образом, векторные линии данного поля есть линии пересечения сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ с плоскостями $x + y + z = C_2$.

Пример 4.2. Найти векторные линии поля градиентов функции

$$f(M) = xy + x^2 + y^2 + z.$$

Решение. Найдем градиент скалярного поля функции $f(M)$:

$$grad\ f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\} = \{\,2x+y,\, 2y+x,\, 1\}\,.$$

Запишем дифференциальные уравнения векторных линий поля градиентов:

$$\frac{dx}{2x+y} = \frac{dy}{2y+x} = \frac{dz}{1}\,.$$

Используя свойство пропорций, имеем $\dfrac{dz}{1} = \dfrac{dx-dy}{x-y}$ и $\dfrac{dz}{1} = \dfrac{dx+dy}{3(x+y)}$.

Проинтегрируем оба равенства:

$$\int \frac{d(x-y)}{x-y} = \int dz, \quad \ln|x-y| = z + C_1\,, \quad \ln|x-y| - z = C_1\,,$$

$$\int \frac{d(x+y)}{x+y} = 3\int dz, \quad \ln|x+y| = 3z + C_2\,, \quad \ln|x+y| - 3z = C_2\,.$$

Таким образом, векторные линии есть линии пересечения поверхностей

$$\begin{cases} \ln|x-y| - z = C_1\,, \\ \ln|x+y| - 3z = C_2. \end{cases}$$

Пример 4.3. Найти векторную линию поля $\vec{a} = \left(x + y^2 + z^2\right)\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$, проходящую через точку $M(1, -1, 1)$.

Решение. Запишем систему дифференциальных уравнений для отыскания векторных линий: $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$. Проинтегрировав дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$, получим $\ln|y| = \ln|z| + \ln C_1$ или $y = C_1 z$.

Применив свойство пропорций, запишем систему в виде:

$$\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dx - 2y\,dy - 2z\,dz}{\left(x+y^2+z^2\right) - 2y^2 - 2z^2} \text{ или } \frac{dy}{y} = \frac{d\left(x-y^2-z^2\right)}{x-y^2-z^2}\,.$$

Проинтегрировав полученное равенство, получим

$$\ln|y| = \ln\left|x-y^2-z^2\right| + \ln C_2 \text{ или } y = C_2\left(x-y^2-z^2\right).$$

Тогда векторные линии данного поля есть линии пересечения поверхностей

$$\begin{cases} y = C_1 z, \\ y = C_2\left(x-y^2-z^2\right). \end{cases}$$

Выделим векторную линию, проходящую через точку $M(1, -1, 1)$. Для этого подставим координаты точки в полученные уравнения поверхностей:

$$\begin{cases} -1 = C_1\cdot 1, \\ -1 = C_2(1-1-1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Итак, уравнение искомой векторной линии $\begin{cases} y = -z, \\ y = x - y^2 - z^2. \end{cases}$

4.2. Поток векторного поля и его вычисление

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность (σ) с единичным нормальным вектором $\vec{n}$ называют величину

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma .$$

Отметим, что при изменении ориентации поверхности вектор $\vec{n}$ заменяется на вектор $(-\vec{n})$ и, следовательно, поток меняет знак.

Употребительны и другие формы записи потока поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$:

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\ \overrightarrow{d\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} P\, d\sigma_{yz} + Q\, d\sigma_{xz} + R\, d\sigma_{xy} \ .$$

Рассмотрим несколько способов вычисления потока.

1). Вычисление потока по формуле $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma$.

При использовании этой формулы надо вычислить $\vec{a}\cdot\vec{n}$ и $d\sigma$; например, $d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy$ для поверхности с уравнением $z = z(x, y)$.

Пример 4.4. Вычислить поток вектора $\vec{a} = 3\vec{j}$ через площадку, имеющую форму треугольника с вершинами в точках $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 2, 2)$, по направлению нормали, направленной в сторону начала координат.

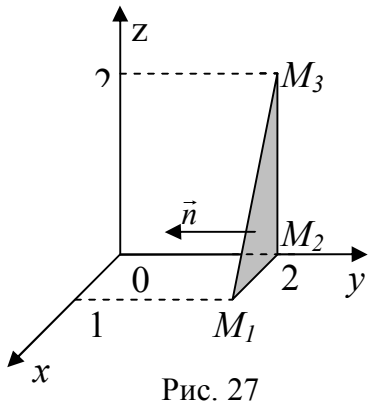

Рис. 27

Решение. Поверхность (σ) – треугольник $M_1M_2M_3$, лежащий в плоскости $y = 2$ (рис. 27). Единичный вектор нормали $\vec{n} = -\vec{j}$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{n} = 3\cdot(-1) = -3$. Учитывая, что площадь треугольника $M_1M_2M_3$ равна $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$, получим

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\cdot\vec{n}\ d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (-3)\, d\sigma = -3\int\limits_{(\sigma)} d\sigma = -3\cdot S_\Delta = -3 .$$

Пример 4.5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x\cdot\vec{i} + (y+z)\cdot\vec{j} + (z-y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$, расположенной в первом октанте $(x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0)$.

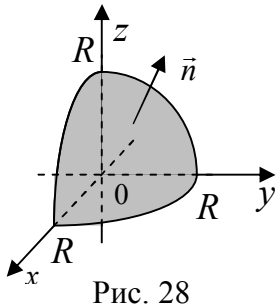

Рис. 28

Решение. Нормальный вектор к сфере коллинеарен радиус-вектору $\vec{r}$ (рис. 28) и $|\vec{r}| = R$; тогда $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{R}\cdot\vec{r} = \frac{1}{R}\cdot\{x, y, z\}$.

Вычислим $\vec{a}\cdot\vec{n}$ на поверхности сферы:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}\big|_\sigma = \frac{1}{R}\Big(x^2 + y\cdot(y+z) + z\cdot(z-y)\Big)\Big|_\sigma = \frac{1}{R}\Big(x^2+y^2+z^2\Big)\Big|_\sigma = \frac{1}{R}\cdot R^2 = R.$$

Тогда $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\cdot\vec{n}\ d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} R\cdot d\sigma = R\int\limits_{(\sigma)} d\sigma = R\cdot\sigma = R\cdot\frac{1}{8}S_{\text{сферы}} = R\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi R^3}{2}$.

Пример 4.6. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}-2x\cdot\vec{j}+(2z-x)\cdot\vec{k}$ через плоский треугольник, отсекаемый от плоскости $6x+2y-3z=6$ координатными плоскостями в положительном направлении оси OZ.

Решение. Нормальный вектор $\vec{N}$ плоскости $6x+2y-3z=6$ равен $\vec{N}=\{6,2,-3\}$, единичный вектор $\vec{n}=\pm\dfrac{\{6,2,-3\}}{\sqrt{36+4+9}}=\pm\dfrac{1}{7}\{6,2,-3\}$. Так как вектор $\vec{n}$ по условию задачи составляет с осью OZ острый угол, то третья координата вектора должна быть больше нуля, следовательно, $\vec{n}=-\dfrac{1}{7}\{6,2,-3\}$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{7}\big[6\cdot(x+z)+2\cdot(-2x)-3\cdot(2z-x)\big]=-\frac{5}{7}x \quad\text{и}\quad \Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\int\limits_{(\sigma)}\left(-\frac{5}{7}x\right)d\sigma.$$

Для вычисления поверхностного интеграла найдем $d\sigma$; для этого выразим переменную z из уравнения плоскости: $z=2x+\dfrac{2}{3}y-2$. Тогда

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}}\,dxdy=\sqrt{1+2^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\,dxdy=\frac{7}{3}\,dx\,dy.$$

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\left(-\frac{5}{7}x\right)\cdot\frac{7}{3}dx\,dy=-\frac{5}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}x\,dx\,dy.$$

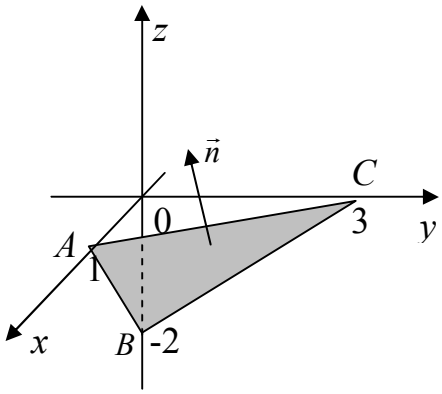

Рис. 29

Проекция (σ_{xy}) поверхности (σ), т.е. треугольника ABC, на плоскость XOY есть треугольник AOC (рис. 29), ограниченный линиями $6x+2y=6,\ x=0,\ y=0$. Поэтому

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma=-\frac{5}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}x\,dx\,dy=-\frac{5}{3}\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{3(1-x)}dy=-\frac{5}{3}\cdot\int\limits_0^1 3x(1-x)\,dx=-5\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{6}.$$

2). Вычисление потока методом проектирования на три плоскости

Воспользуемся формулой $\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}P\,d\sigma_{yz}+Q\,d\sigma_{xz}+R\,d\sigma_{xy}$.

Для вычисления интеграла $I_1=\int\limits_{(\sigma)}P(x,y,z)\,d\sigma_{yz}$ следует

а) в подынтегральной функции заменить x его значением $x=x(y,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{yz}=\text{пр}_{yoz}\,d\sigma$ и поэтому $d\sigma_{yz}=\begin{cases}+dy\,dz, & \widehat{(\vec{n},ox)}<\pi/2,\\ -dy\,dz, & \widehat{(\vec{n},ox)}>\pi/2,\\ 0, & \widehat{(\vec{n},ox)}=\pi/2,\end{cases}$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{yz}).

Для вычисления интеграла $I_2 = \int\limits_{(\sigma)} Q\,d\sigma_{xz}$ следует

а) в подынтегральной функции заменить y его значением $y = y(x,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{xz} = \text{пр}_{xoz}\, d\sigma$ и поэтому $d\sigma_{xz} = \begin{cases} +dx\,dz, & \left(\widehat{\vec{n},oy}\right) < \pi/2, \\ -dx\,dz, & \left(\widehat{\vec{n},oy}\right) > \pi/2, \\ 0, & \left(\widehat{\vec{n},oy}\right) = \pi/2 \end{cases}$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{xz}).

Аналогично вычисляется интеграл I_3.

Пример 4.7. Вычислить поток поля $\vec{a} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \cdot \vec{j} + xz^3 \cdot \vec{k}$ через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 16$, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Решение. Для вычисления потока (рис. 30) воспользуемся формулой

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(\sigma)} x^3\,d\sigma_{yz} - y^3\,d\sigma_{xz} + xz^3\,d\sigma_{xy}.$$

1). Сведем интеграл $I_1 = \int\limits_{(\sigma)} x^3\,d\sigma_{yz}$ к двойному интегралу.

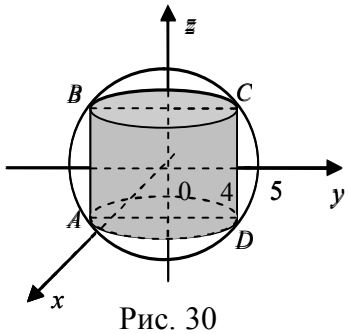

Рис. 30

На части (σ_1) цилиндра, где $x = +\sqrt{16 - y^2}$, имеем:

$$\left(\widehat{\vec{n},ox}\right) < \pi/2,\ d\sigma_{yz} = +dy\,dz;$$

на части (σ_2) цилиндра, где $x = -\sqrt{16 - y^2}$, имеем:

$$\left(\widehat{\vec{n},ox}\right) > \pi/2,\ d\sigma_{yz} = -dy\,dz;$$

$$I_1 = \int\limits_{(\sigma_1)} x^3\,d\sigma_{yz} + \int\limits_{(\sigma_2)} x^3\,d\sigma_{yz} = \iint\limits_{(\sigma_{yz})} \left(\sqrt{16 - y^2}\right)^3 dydz - \iint\limits_{(\sigma_{yz})} \left(-\sqrt{16 - y^2}\right)^3 dydz = 2 \iint\limits_{(\sigma_{yz})} \left(\sqrt{16 - y^2}\right)^3 dydz.$$

2). Сведем интеграл $I_2 = \int\limits_{(\sigma)} y^3\,d\sigma_{xz}$ к двойному интегралу.

На части (σ_3) цилиндра, где $y = +\sqrt{16 - x^2}$, имеем: $\left(\widehat{\vec{n},oy}\right) < \pi/2,\ d\sigma_{xz} = +dx\,dz$;

на части (σ_4) цилиндра, где $y = -\sqrt{16 - x^2}$, имеем: $\left(\widehat{\vec{n},oy}\right) > \pi/2,\ d\sigma_{xz} = -dx\,dz$;

$$I_2 = \int\limits_{(\sigma_3)} y^3 d\sigma_{xz} + \int\limits_{(\sigma_4)} y^3 d\sigma_{xz} = \iint\limits_{(\sigma_{xz})} \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^3 dxdz - \iint\limits_{(\sigma_{xz})} \left(-\sqrt{16 - x^2}\right)^3 dxdz = 2 \iint\limits_{(\sigma_{xz})} \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^3 dxdz.$$

Проекция (σ_{yz}) есть прямоугольник *ABCD*, проекция (σ_{xz}) есть такой же прямоугольник, но в плоскости *XOZ*, подынтегральные функции в интегралах $I_1,\ I_2$ равны между собой, поэтому $I_1 = I_2,\ I_1 - I_2 = 0$.

3). Вычислим интеграл $I_3 = \int\limits_{(\sigma)} xz^3\,d\sigma_{xy}$.

Так как на поверхности цилиндра $\left(\widehat{\vec{n},oz}\right) = \pi/2$, то $d\sigma_{xy} = 0$ и поэтому $I_3 = 0$.

В результате $\Pi_\sigma = I_1 - I_2 + I_3 = 0.$

Пример 4.8. Вычислить поток поля $\vec{a} = (y+3)\,\vec{i} + (3-z)\,\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$, лежащей в четвертом октанте.

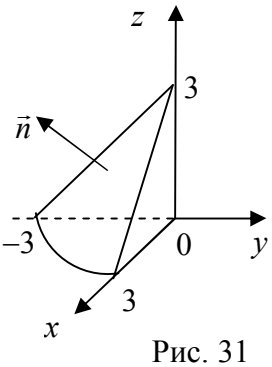

Рис. 31

Решение. Построим поверхность методом сечений (рис.31), учитывая, что в четвертом октанте $x \ge 0,\ y \le 0,\ z \ge 0$:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 3 - |y| = 3 + y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 3 - |x| = 3 - x, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 3^2. \end{cases}$$

Для вычисления потока поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ через поверхность (σ) воспользуемся формулой

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(\sigma)} (y+3)\,d\sigma_{yz} + \int\limits_{(\sigma)} (3-z)\,d\sigma_{xy} = I_1 + I_2. .$$

1). Вычислим интеграл $I_1 = \int\limits_{(\sigma)} (y+3)\,d\sigma_{yz}$.

Так как на поверхности $\left(\widehat{\vec{n}, ox}\right) < \pi/2$, то $d\sigma_{yz} = +dy\,dz$ и

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma_{yz})} (y+3)\,dy\,dz = \int\limits_{-3}^{0} (y+3)\,dy \int\limits_{0}^{3+y} dz = \int\limits_{-3}^{0} (y+3)^2\,dy = \left.\frac{(y+3)^3}{3}\right|_{-3}^{0} = 9.$$

2). Вычислим интеграл $I_2 = \int\limits_{(\sigma)} (3-z)\,d\sigma_{xy}$.

На поверхности $\left(\widehat{\vec{n}, oz}\right) < \pi/2$, поэтому $d\sigma_{xy} = +dx\,dy$. Тогда

$$I_2 = \int\limits_{(\sigma)} (3-z)\,d\sigma_{xy} = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Так как (σ_{xy}) есть часть круга $(0 \le \rho \le 3,\ 3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi)$, то двойной интеграл вычислим в полярной системе координат:

$$I_2 = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{3} \rho \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot 9.$$

В результате $\Pi_\sigma = I_1 + I_2 = 9 + \dfrac{9\pi}{2}.$

Пример 4.9. Найти поток поля вектора $\vec{a} = y^3 \cdot \vec{i} + x\,y^2 \cdot \vec{j} + (2z - xy) \cdot \vec{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, отсеченной плоскостями $z = 1$, $z = 4$ в направлении внешней нормали (рис. 32).

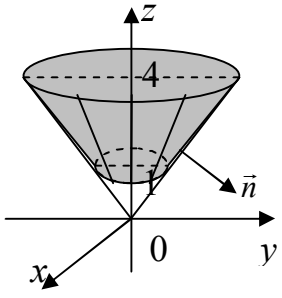

Рис. 32

Решение. Для вычисления потока воспользуемся формулой

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(\sigma)} y^3\,d\sigma_{yz} + xy^2\,d\sigma_{xz} + (2z - xy)\,d\sigma_{xy}.$$

1). Сведем интеграл $I_1 = \int\limits_{(\sigma)} y^3 d\sigma_{yz}$ к двойному интегралу.

На части (σ_1) поверхности, где $x = +\sqrt{z^2 - y^2}$, имеем: $\left(\widehat{\vec{n}, ox}\right) < \pi/2$, $d\sigma_{yz} = +dy\,dz$;

на части (σ_2) поверхности, где $x = -\sqrt{z^2 - y^2}$, имеем: $\left(\widehat{\vec{n}, ox}\right) > \pi/2$, $d\sigma_{yz} = -dy\,dz$.

Поэтому $I_1 = \int\limits_{(\sigma_1)} y^3 d\sigma_{yz} + \int\limits_{(\sigma_2)} y^3 d\sigma_{yz} = \iint\limits_{(\sigma_{yz})} y^3 dy\,dz - \iint\limits_{(\sigma_{yz})} y^3 dy\,dz = 0.$

2). Сведем интеграл $I_2 = \int\limits_{(\sigma)} xy^2 d\sigma_{xz}$ к двойному интегралу.

На части (σ_3) поверхности, где $y = +\sqrt{z^2 - x^2}$, имеем: $\left(\widehat{\vec{n}, oy}\right) < \pi/2$, $d\sigma_{xz} = +dx\,dz$;

на части (σ_4) поверхности, где $y = -\sqrt{z^2 - x^2}$, имеем: $\left(\widehat{\vec{n}, oy}\right) > \pi/2$, $d\sigma_{xz} = -dx\,dz$.

Поэтому $I_2 = \int\limits_{(\sigma_3)} xy^2 d\sigma_{xz} + \int\limits_{(\sigma_4)} xy^2 d\sigma_{xz} = \iint\limits_{(\sigma_{xz})} x\left(z^2 - x^2\right) dxdz - \iint\limits_{(\sigma_{xz})} x\left(z^2 - x^2\right) dxdz = 0.$

Проекция $\left(\sigma_{yz}\right)$ есть прямоугольник *ABCD*, проекция $\left(\sigma_{xz}\right)$ есть такой же прямоугольник, но в плоскости XOZ, подынтегральные функции в интегралах I_1, I_2 равны между собой, поэтому $I_1 = I_2$, $I_1 - I_2 = 0$.

3). Вычислим интеграл $I_3 = \int\limits_{(\sigma)} (2z - xy) d\sigma_{xy}$.

На поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\left(\widehat{\vec{n}, oz}\right) > \pi/2 \Rightarrow d\sigma_{xy} = -dx\,dy$, поэтому.

$$I_3 = \int\limits_{(\sigma)} (2z - xy) d\sigma_{xy} = -\iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left(2\sqrt{x^2 + y^2} - xy\right) dx\,dy = -\iint\limits_{(\sigma_{xy})} (2\rho - \rho\cos\varphi \cdot \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= -2\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{4} \rho^2 d\rho + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}_{\text{нечетная}} d\varphi \int\limits_{1}^{4} \rho^3 d\rho = -2\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_1^4 = -84\pi.$$

В результате $\Pi_\sigma = I_1 + I_2 + I_3 = -84\pi$.

3). Вычисление потока с использованием формулы Остроградского

В случае ***замкнутой*** поверхности поток векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ удобно вычислять по ***формуле Остроградского*** с помощью дивергенции $\operatorname{div}\vec{a}$ поля:

$$\Pi_\sigma = \oint\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV, \text{ где } \operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

(V) – тело, ограниченное замкнутой поверхностью (σ), причём поверхность (σ) ориентирована внешней нормалью.

Пример 4.10. Найти поток поля $\vec{a}=\left(3z^2+x\right)\cdot\vec{i}+\left(e^x-2y\right)\cdot\vec{j}+\left(2z-xy\right)\cdot\vec{k}$ через замкнутую поверхность (σ): $x^2+y^2=z^2$, $z=1$, $z=4$ (рис. 32).

Решение. Вычислим $div\,\vec{a}=1-2+2=1$.

Тогда $\Pi_\sigma=\iint\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{a}\,dV=\iiint\limits_{(V)}dV=V$, где V – объём усеченного конуса;

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R_1{}^2\cdot h_1-R_2{}^2\cdot h_2\right)=\frac{1}{3}\pi\left(4^2\cdot 4-1^2\cdot 1\right)=21\pi,$$ то есть $\Pi_\sigma=21\pi$.

Пример 4.11. Найти поток поля вектора $\vec{a}=xz\cdot\vec{i}-\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через замкнутую поверхность (σ): $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=1$, $z=y$, $z=0$, $(x\ge 0)$, в направлении нормали, направленной внутрь тела.

Решение. В формуле Остроградского поверхность (σ) ориентирована внешней нормалью. Поток в направлении внутренней нормали будет равен значению потока, вычисленного по формуле Остроградского, с противоположным знаком. Поэтому

$$\Pi_\sigma=-\iint\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{a}\,dV=-\iiint\limits_{(V)}z\,dx\,dy\,dz.$$

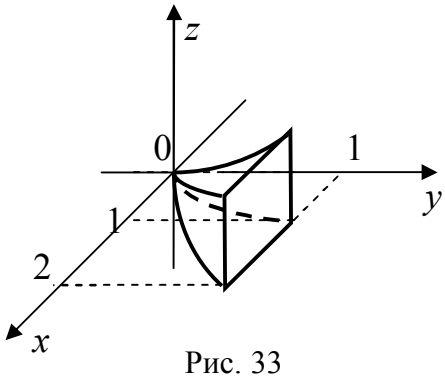

Рис. 33

Для вычисления тройного интеграла построим поверхности, ограничивающие тело (V). Сверху тело ограничено плоскостью $z=y$ (рис. 33), снизу – плоскостью $z=0$, сбоку – цилиндрическими поверхностями $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=1$. Рассмотрим проекцию тела (V) на плоскость (XOY) (рис. 34). Справа и слева фигура ограничена линиями $x=2\sqrt{y}$, $x=\sqrt{y}$, $0\le y\le 1$. Поэтому

$$\Pi_\sigma=-\iiint\limits_{(V)}z\,dx\,dy\,dz=-\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}}dx\int\limits_0^y z\,dz=-\int\limits_0^1\frac{y^2}{2}\,dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}}dx=$$

$$=-\int\limits_0^1\frac{y^2}{2}\cdot\sqrt{y}\,dy=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot y^{7/2}\Big|_0^1=-\frac{1}{7}.$$

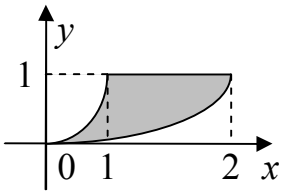

Рис. 34

Пример 4.12. Вычислить поток поля $\vec{a}=3x\cdot\vec{i}-7y\cdot\vec{j}+5z\cdot\vec{k}$ через боковую поверхность тела, ограниченного поверхностями $9-z=x^2+y^2$, $z=0$, в направлении внешней нормали.

Решение. Построим поверхность методом сечений (рис. 35):

$$\begin{cases}x=0,\\ z=9-y^2\end{cases}\left(\text{парабола}\right),\quad\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2=3^2\end{cases}\left(\text{окружность}\right).$$

Воспользоваться формулой Остроградского нельзя, так как боковая поверхность незамкнута, поэтому вычислим поток через боковую поверхность тела по форму-

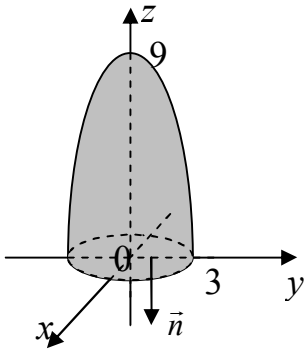

Рис. 35

ле $П_{бок} = П_{полн} - П_{осн}$, где $П_{полн}$ – поток через замкнутую поверхность, $П_{осн}$ – поток через основание тела в направлении внешней нормали.

$$П_{полн} = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = \int\limits_{(V)} (3-7+5)\, dV = \int\limits_{(V)} dV .$$

Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрической системе координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,\ dv = \rho\cdot d\rho\, d\varphi\, dz .$$

Уравнение поверхности примет вид $z = 9-\rho^2$. Проекцией тела на плоскость (XOY) является круг $x^2+y^2 \le 9$ или $0 \le \rho \le 3$. Тогда

$$П_{полн} = \int\limits_{(V)} dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho\, d\rho \int\limits_0^{9-\rho^2} dz = 2\pi\cdot\int\limits_0^3 \rho\left(9-\rho^2\right)d\rho = 2\pi\cdot\frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}.$$

Найдем поток через плоскость основания $z=0$ в направлении внешней нормали:

$$\vec{n} = -\vec{k},\ \vec{a}\cdot\vec{n}\Big|_\sigma = -\vec{a}\cdot\vec{k}\Big|_\sigma = -5z\big|_{z=0} = 0,\quad П_{осн} = \int\limits_{(\sigma)} 0\cdot d\sigma = 0 .$$

Тогда $П_{бок} = П_{полн} - П_{осн} = 81\pi/2$.

4.3. Линейный интеграл векторного поля

Линейным интегралом поля $\vec{a}$ по дуге BC называют интеграл $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$.

Выразив скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ через их координаты, получим

$$\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} P\, dx + Q\, dy + R\, dz .$$

1). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по линии BC, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, следует:

а) записать интеграл в координатной форме

$$\int\limits_{\cup BC} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz,$$

б) заменить x, y, z в функциях P, Q, R соответственно на $x(t), y(t), z(t)$,

в) заменить dx, dy, dz соответственно на $x'(t)\, dt,\ y'(t)\, dt,\ z'(t)\, dt$,

г) найти интервал изменения параметра t и вычислить получившийся определенный интеграл по этому интервалу.

2). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по плоской линии BC с уравнением $y = y(x),\ x \in [b, c]$ следует:

а) записать интеграл в координатной форме $\int\limits_{\cup BC} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$,
б) заменить y в функциях P, Q на $y(x)$,
в) заменить dy на $y'(x)\,dx$,
г) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[b, c]$.

3). В случае центрального поля $\vec{a} = f(r)\,\vec{r}$

$$\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} f(r)\,\vec{r}\,d\vec{r} = \int\limits_{r_B}^{r_C} f(r)\,r\,dr.$$

Пример 4.13. Вычислить линейный интеграл поля $\vec{a} = y\cdot\vec{i} - x\cdot\vec{j}$ вдоль части астроиды $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$, лежащей в первой четверти (рис. 36).

Решение. Найдем значения параметра t, соответствующие точкам A и B:

$$\text{т.}A\text{:}\ \begin{cases} x = 4\cos^3 t = 4, \\ y = 4\sin^3 t = 0, \end{cases} \Rightarrow\ t_A = 0; \qquad \text{т.}B\text{:}\ \begin{cases} x = 4\cos^3 t = 0, \\ y = 4\sin^3 t = 4, \end{cases} \Rightarrow\ t_B = \pi/2.$$

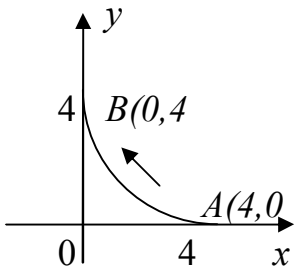

Рис. 36

Линейный интеграл запишем в координатной форме

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} y\,dx - x\,dy\ .$$

Подставляя $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, & dx = -12\cos^2 t\cdot\sin t\ dt, \\ y = 4\sin^3 t, & dy = 12\cos t\cdot\sin^2 t\ dt, \end{cases}$ получим:

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} \left(-48\sin^4 t\cdot\cos^2 t - 48\cos^4 t\cdot\sin^2 t\right)dt == -48\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt =$$

$$= -12\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = -6\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = -6\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -3\pi.$$

Пример 4.14. Вычислить линейный интеграл векторного поля $\vec{a} = \left(x^2 - 2xy\right)\cdot\vec{i} + \left(y^2 - 2xy\right)\cdot\vec{j}$ вдоль параболы $y = x^2,\quad x\in[-1, 1]$.

Решение. Линейный интеграл запишем в координатной форме

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{(\cup AB)} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy.$$

и подставим $y = x^2,\quad dy = 2x\,dx$. Тогда

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{(\cup AB)} \left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy = \int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3\right)dx+\left(x^4-2x^3\right)\cdot 2x\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx = 2\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-4x^4\right)dx = 2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{14}{15}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что интеграл от нечетной функции $\left(-2x^3+2x^5\right)$ по отрезку $[-1,1]$ равен нулю, а от четной функции $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx$.

Пример 4.15. Вычислить работу силы $\vec{F} = \left(y^2-z^2\right)\cdot\vec{i}+\left(z^2-x^2\right)\cdot\vec{j}+\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{k}$ при перемещении единичной массы по контуру, образованному линией пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=1$ с координатными плоскостями $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, в положительном направлении обхода контура.

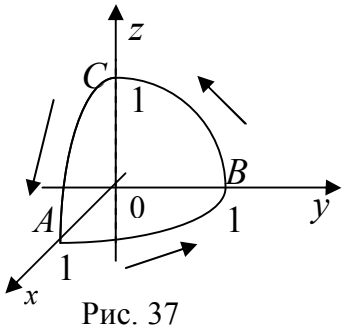

Рис. 37

Решение. Работу поля вычислим по формуле

$$A = \int\limits_{(L)} \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = \int\limits_{(L)} \left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz\,.$$

Контур (L) состоит из дуг окружностей единичного радиуса с центром в начале координат, расположенных в координатных плоскостях $x=0,\ y=0,\ z=0$ (рис. 37).

По свойству аддитивности

$$\int\limits_{(L)} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_{\cup AB} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} + \int\limits_{\cup BC} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} + \int\limits_{\cup CA} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}\,.$$

Рассмотрим каждый из интегралов.

Так как дуга AB имеет уравнение $z=0,\quad x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$dx=-\sin t\,dt,\quad dy=\cos t\,dt,\quad dz=0\,;$$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = y^2\,dx-x^2dy = \left(-\sin^3 t-\cos^3 t\right)dt\,;\qquad \int\limits_{\cup AB}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)d\,t\,.$$

Аналогично, для дуги BC: $x=0,\quad y=\cos t,\quad z=\sin t,\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$dx=0,\quad dy=-\sin t\,d\,t,\quad dz=\cos t\,d\,t;$$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = z^2dy-y^2dz = \left(-\sin^3 t-\cos^3 t\right)d\,t\,;\qquad \int\limits_{\cup BC}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)d\,t\,.$$

Для дуги CA: $y=0,\quad x=\cos t,\quad z=\sin t\,;\quad dy=0,\quad dx=-\sin t\,d\,t,\quad dz=\cos t\,d\,t;$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -z^2dx+x^2dz = \left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)d\,t\,,$$

$$\int\limits_{\cup CA}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_{\pi/2}^{0}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt = -\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt\,.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{(L)} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -3\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt = 3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right) - 3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right) =$$

$$= \left(3\cos t - \cos^3 t - 3\sin t + \sin^3 t\right)\Big|_0^{\pi/2} = -4\,.$$

4.4. Циркуляция векторного поля

Линейный интеграл поля $\vec{a}$ ***по замкнутой кривой*** (L) называют ***циркуляцией*** поля $\vec{a}$ по кривой (L) и обозначают так:

$$C(\vec{a}, L) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r}\,.$$

Для вычисления циркуляции плоского поля $\vec{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ по границе (L) области (D) удобно использовать ***формулу Грина:***

$$\oint\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\,.$$

Для вычисления циркуляции пространственного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ по замкнутой кривой (L) удобно использовать ***формулу Стокса***:

$$\oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\overrightarrow{d\sigma}\ , \text{ где } \operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

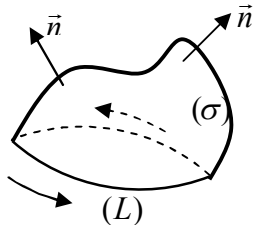

Рис. 38

В этой формуле (σ) – произвольная поверхность, натянутая на кривую (L); ориентации контура (L) и поверхности (σ) согласованы, т. е., глядя с конца выбранных нормальных векторов поверхности (σ), обход контура (L) виден против часовой стрелки (рис. 38).

Пример 4.16. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = \left(y + x^5\right)\vec{i} + \left(3x + y^8\right)\vec{j}$ по границе области, изображенной на рис. 39.

Решение. Для вычисления циркуляции плоского поля по плоской кривой применим формулу Грина:

$$C = \int\limits_{(L)} \underbrace{\left(y + x^5\right)}_{=P} dx + \underbrace{\left(3x + y^8\right)}_{=Q} dy = \iint\limits_{(D)} \left(Q'_x - P'_y\right)dx\,dy = \iint\limits_{(D)} (3-1)\,dx\,dy = 2S.$$

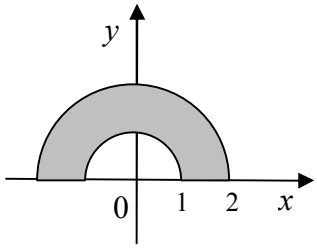

Рис. 39

Здесь S есть площадь полукольца, поэтому

$$C = 2S = 2\left(\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}\right) = 4\pi - \pi = 3\pi\,.$$

Отметим, что непосредственное вычисление циркуляции без формулы Грина в этом примере значительно сложнее.

Пример 4.17. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = y^2\,\vec{i}$ по кривой, составленной из половины эллипса $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ и отрезка оси Oy (рис. 40).

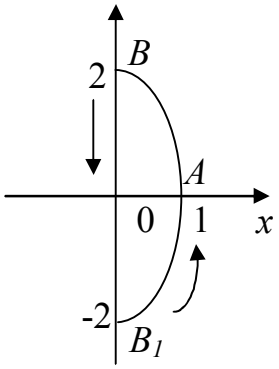

Рис. 40

Решение. Вычислим циркуляцию без формулы Грина:

$$C(\vec{a}, L) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(L_1)} \vec{a}\,d\vec{r} + \int\limits_{(L_2)} \vec{a}\,d\vec{r} = I_1 + I_2\,.$$

На эллипсе B_1AB имеем: $\begin{cases} x = \cos t, & dx = -\sin t\,dt, \\ y = 2\sin t, & dy = 2\cos t\,dt, \end{cases} \quad t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right].$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{(B_1AB)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{(B_1AB)} y^2 dx = -4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t\,dt = 0 \quad \text{(как интеграл от нечетной функции)}.$$

На отрезке BB_1: $x = 0$, $dx = 0$. Поэтому $I_2 = \int\limits_{BB_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{BB_1} y^2 \underbrace{dx}_{=0} = 0$.

Значит, $C(\vec{a}, L) = I_1 + I_2 = 0$. Самостоятельно вычислите циркуляцию, используя формулу Грина.

Пример 4.18. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = x^2\,\vec{i} + z^2\,\vec{j}$ вдоль контура (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3y + 4z = 5 \end{cases}$ непосредственно и по формуле Стокса.

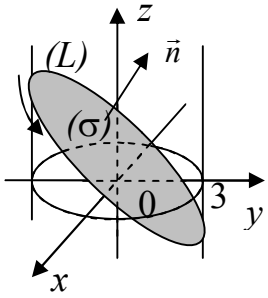

Рис. 41

Решение. Контур (L) – эллипс, получаемый при пересечении цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 9$ (рис. 41) с плоскостью $3y + 4z = 5$. По формуле Стокса циркуляция

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\;d\vec{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\;d\sigma\,,$$

где (σ) – любая поверхность, натянутая на контур (L), например, поверхность (σ) – часть плоскости $3y + 4z = 5$, ограниченная эллипсом (L). Ориентация контура (L) и поверхности (σ) показана на рис. 41.

Вычислим ротор поля и нормальный вектор плоскости $3y + 4z = 5$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = -2z\cdot\vec{i}\,, \quad \vec{N} = \{0, 3, 4\}\,, \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Тогда $\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n} = \{-2z, 0, 0\}\cdot\left\{0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right\} = -2z\cdot 0 + 0\cdot\dfrac{3}{5} + 0\cdot\dfrac{4}{5} = 0$ и $C(\vec{a}) = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\;d\sigma = 0$.

Можно вычислить циркуляцию поля без формулы Стокса, задав линию (L) параметрически: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t \;\Rightarrow\; z = \dfrac{5 - 3y}{4} = \dfrac{5 - 9\sin t}{4}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r} = \oint\limits_{(L)} x^2\, dx + z^2 dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{9\cos^2 t\,(-3\sin t)}_{\text{нечетная}} dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{5-9\sin t}{4}\right)^2 3\cos t\, dt =$$

$$= 0 + \frac{3}{16} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (5-9\sin t)^2\, d(\sin t) = \frac{3}{8}\left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{(5-9\sin t)^3}{3}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Пример 4.19. Вычислить поток ротора поля $\vec{a} = y e^{xy}\vec{i} + x e^{xy}\vec{j} + x y z \vec{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 = (z-1)^2$, расположенную в первом октанте при $z \le 1$ в направлении нормали от начала координат.

Решение. Построим поверхность методом сечений, учитывая, что в первом октанте $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = |z-1| = 1-z, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = |z-1| = 1-z, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$ (рис.42).

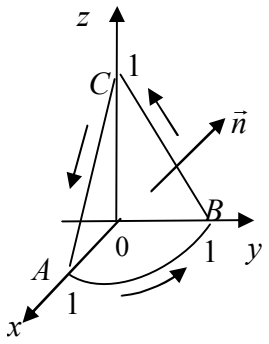

Рис. 42

Для вычисления потока поля $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхность (σ) воспользуемся формулой Стокса:

$$\Pi(\operatorname{rot}\vec{a}) = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\ d\vec{\sigma} = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r}\,.$$

Обход контура (L), согласованный с направлением нормального вектора $\vec{n}$, указан на рис. 42 стрелками. Контур (L) состоит из двух отрезков BC и CA и дуги окружности AB. Поэтому

$$\Pi(\operatorname{rot}\vec{a}) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{BC} \vec{a}\, d\vec{r} + \int\limits_{CA} \vec{a}\, d\vec{r} + \int\limits_{\cup AB} \vec{a}\, d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3\,.$$

На отрезке BC $x = 0,\ dx = 0$, поэтому $\vec{a}\, d\vec{r} = \{y, 0, 0\} \cdot \{0, dy, dz\} = 0$, $I_1 = \int\limits_{BC} \vec{a}\, d\vec{r} = 0$.

На отрезке CA $y = 0,\ dy = 0$, поэтому $\vec{a}\, d\vec{r} = \{0, x, 0\} \cdot \{dx, 0, dz\} = 0$, $I_2 = \int\limits_{CA} \vec{a}\, d\vec{r} = 0$.

На дуге окружности AB имеем $z = 0,\ dz = 0$, поэтому

$$\vec{a}\, d\vec{r} = \left\{y e^{xy}, x e^{xy}, 0\right\} \cdot \{dx, dy, 0\} = e^{xy}(y\, dx + x\, dy) = e^{xy}\, d(xy),$$

$$I_3 = \int\limits_{AB} e^{xy}\, d(xy) = e^{xy}\Big|_{A(1,0)}^{B(0,1)} = 1 - 1 = 0.$$

Итак, $\Pi(\operatorname{rot}\vec{a}) = I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

4.5. Потенциальные, соленоидальные, гармонические поля

Потенциальное поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется ***потенциальным***, если оно является ***полем градиента*** некоторой скалярной функции U, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad} U$; при этом функцию U называют ***скалярным потенциалом*** векторного поля.

Свойства потенциального поля

1). Поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом $U \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot d\vec{r} = dU$.
2). В потенциальном поле линейный интеграл $\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r}$ не зависит от формы пути.
3). В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.
4). Односвязное поле $\vec{a}$ потенциально $\Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.
5). В потенциальном поле линейный интеграл по дуге равен разности потенциалов конца и начала дуги.
6). Центральное поле $\vec{a} = f(r)\cdot\vec{r}$ потенциально и его потенциал $U(r) = \int f(r)\cdot r\,dr$.

Пример 4.20. Показать, что поле $\vec{a} = \dfrac{yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$ потенциально. Найти работу поля при перемещении по линии (L): $\left\{x^2 = 6z,\ y = 6\right\}$ от т. $B(1, 6, 1/6)$ до т. $D(0, 6, 0)$.

Решение. Так как $\vec{a}\cdot d\vec{r} = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2} = \dfrac{d(xyz)}{1 + (xyz)^2} = d(\operatorname{arctg} xyz) = dU$,

то по свойству 1) поле $\vec{a}$ потенциально и $U = \operatorname{arctg} xyz$ – его потенциал. В потенциальном поле линейный интеграл (а значит, и работа A) по дуге кривой равен разности потенциалов конца и начала дуги, т.е.

$$A = \int\limits_{\cup BD} \vec{a}\cdot\overrightarrow{dr} = U(D) - U(B) = \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4.21. Найти потенциал поля $\vec{a}$, если: 1) $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, 2) $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$.

Решение. По свойству 6) центральное поле вектора $\vec{a} = f(r)\cdot\vec{r}$ потенциально и его потенциал равен $U(r) = \int f(r)\cdot r\,dr$, поэтому:

$$1)\ U(r) = \int \frac{r}{r}\,dr = r + C; \quad 2)\ U(r) = \int \frac{r}{r^2}\,dr = \int \frac{1}{r}\,dr = \ln r + C.$$

Пример 4.22. Является ли поле вектора $\vec{a} = \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{z}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{y}{z^2} - \dfrac{1}{x}\right)\vec{k}$ потенциальным? Если да, то найти его потенциал.

Решение. Вычислим ротор поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right) & \left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{z}\right) & \left(\dfrac{y}{z^2} - \dfrac{1}{x}\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\right)\vec{i} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$, то поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом U, причем $\operatorname{grad} U = \vec{a}$, или в координатной форме

$$U'_x=\left(\frac{z}{x^2}-\frac{1}{y}\right),\quad U'_y=\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{z}\right),\quad U'_z=\left(\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}\right). \tag{4.1}$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x: $U=\int\left(\frac{z}{x^2}-\frac{1}{y}\right)dx=-\frac{z}{x}-\frac{x}{y}+\varphi(y,z)$.

Подставим полученную функцию $U=-\frac{z}{x}-\frac{x}{y}+\varphi(y,z)$ во второе из равенств (4.1):

$$U'_y=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{z}=\frac{x}{y^2}-\varphi'_y(y,z)\Rightarrow\varphi'_y(y,z)=-\frac{1}{z}\Rightarrow\varphi(y,z)=-\int\frac{1}{z}dy=-\frac{y}{z}+C(z)\Rightarrow U=-\frac{z}{x}-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+C(z).$$

Подставим полученную функцию в третье из равенств (4.1) и найдем $C(z)$:

$$U'_z=\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}+\frac{y}{z^2}+C'_z(z)\ \Rightarrow\ C'_z(z)=0\ \Rightarrow\ C(z)=const=C.$$

Таким образом, имеем $U(x,y,z)=-\frac{z}{x}-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+C$. Для проверки следует найти вектор $\operatorname{grad}U=\{U'_x,U'_y,U'_z\}$ и проверить его совпадение с заданным вектором $\vec{a}$.

Соленоидальное поле

Поле $\vec{a}$ называют ***соленоидальным***, если оно является ***полем ротора*** некоторой векторной функции $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b}$; при этом вектор $\vec{b}$ называют ***векторным потенциалом*** поля $\vec{a}$.

Поле $\vec{a}$ является соленоидальным тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}\vec{a}=0$.

Пример 4.23. Какие из следующих векторных полей являются соленоидальными?

1) $\overrightarrow{a_1}=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^3\right)\cdot\vec{j}+z\left(3y^2+1\right)\cdot\vec{k}$,

2) $\overrightarrow{a_2}=x\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{i}+y\left(x^2-z^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{k}$?

Решение. Поле вектора $\vec{a}$ соленоидально, если $div\,\vec{a}=0$.

Так как $div\,\overrightarrow{a_1}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0-3y^2+\left(3y^2+1\right)=1\neq0$, то поле вектора $\overrightarrow{a_1}$ не является соленоидальным;

$div\,\overrightarrow{a_2}=\left(z^2-y^2\right)+\left(x^2-z^2\right)+\left(y^2-x^2\right)=0$, значит, поле вектора $\overrightarrow{a_2}$ соленоидально.

Гармоническое скалярное поле

Скалярное поле f называют ***гармоническим***, если функция f удовлетворяет ***уравнению Лапласа*** $\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)=0$.

Правую часть уравнения Лапласа называют ***оператором Лапласа*** и обозначают Δf. Оператор Лапласа будет использован в дальнейшем при решении задач математической физики (задач колебания, теплопроводности, диффузии).

В прямоугольной системе координат уравнение Лапласа принимает вид

$$\Delta f=f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}=0.$$

Пример 4.24. Будет ли скалярное поле $u = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x\,y + d\,x\,z + l\,y\,z$ гармоническим?

Решение. Вычислим производные $u''_{xx} = 2a$, $u''_{yy} = 2b$, $u''_{zz} = 0$ и оператор Лапласа $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 2a + 2b$. Если $b = -a$, то $\Delta u = 0$ и заданное поле является гармоническим. В остальных случаях это поле не является гармоническим.

Гармоническое векторное поле

Векторное поле $\vec{a}$, являющееся одновременно и потенциальным, и соленоидальным, называют ***гармоническим*** векторным полем.

Пример 4.25. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = (y\,z - 2x)\vec{i} + (x\,z + 2\,y)\vec{j} + x\,y\,\vec{k}$ является гармоническим. Найти его скалярный потенциал.

Решение. 1). Вычислим выражение $\vec{a}\,d\vec{r}$:

$$\vec{a}\,d\vec{r} = \{(y\,z - 2x),\,(x\,z + 2\,y),\,x\,y\}\cdot\{dx,\,dy,\,dz\} = (y\,z - 2x)\,dx + (x\,z + 2\,y)\,dy + x\,y\,dz =$$

$$= \underbrace{y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,dz}_{= d(x\,y\,z)}\ \underbrace{-2x\,dx + 2y\,dy}_{= d\left(y^2 - x^2\right)}.$$

Так как выражение $\vec{a}\,d\vec{r}$ является полным дифференциалом $d\left(x\,y\,z + y^2 - x^2\right)$, то поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом $U = x\,y\,z + y^2 - x^2$.

2). Вычислим дивергенцию поля: $\operatorname{div}\vec{a} = (y\,z - 2x)'_x + (x\,z + 2\,y)'_y + (x\,y)'_z = -2 + 2 + 0 = 0$.

Так как $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то поле $\vec{a}$ соленоидально. Итак, поле $\vec{a}$ одновременно является и потенциальным, и соленоидальным, поэтому оно является гармоническим.

4.6. Действия с оператором Гамильтона «набла»

Рассмотрим символический оператор Гамильтона (или вектор “набла”)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

С его помощью удобно записать основные операции теории поля:

1) градиент скалярного поля есть произведение вектора $\vec{\nabla}$ на скалярную функцию f

$$\operatorname{grad} f = \left\{\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f, \frac{\partial}{\partial z}f\right\} = \vec{\nabla} f;$$

2) дивергенция векторного поля есть скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор поля

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\{P, Q, R\} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a};$$

3) ротор векторного поля $\vec{a}$ есть векторное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\nabla}\times\vec{a};$$

4) оператор Лапласа Δ скалярного поля f

$$\boxed{\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f} \text{ или символически } \boxed{\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2;}$$

5)
$$\boxed{\begin{array}{lll} \operatorname{grad} r = \vec{\nabla} r = \dfrac{\vec{r}}{r}, & \operatorname{div}\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3 \text{ в } \mathrm{R}_3, & \operatorname{rot}\vec{r} = \vec{\nabla}\times\vec{r} = 0, \\ \operatorname{grad}(\vec{a},\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{a},\vec{r}) = \vec{a}, & \operatorname{div}\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 2 \text{ в } \mathrm{R}_2, & \operatorname{rot}\left(f(r)\vec{r}\right) = 0. \\ (\vec{a} - \textit{постоянный вектор}) & & \end{array}} \qquad (4.2)$$

Такая запись основных операций поля наиболее часто используется в физических и технических приложениях.

При применении оператора $\vec{\nabla}$ следует учитывать и его векторную и его дифференциальную природу. На этом основаны правила применения $\vec{\nabla}$. Эти правила можно было заметить при изучении дифференциальных свойств дивергенции, градиента, ротора.

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, не содержащим произведения переменных

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, не содержащим произведения переменных, происходит по правилам векторной алгебры. При этом величину, на которую действует оператор $\vec{\nabla}$, отмечают штрихом (когда это требуется) и располагают справа от $\vec{\nabla}$, соблюдая правила векторной алгебры.

Следует иметь в виду, что $\vec{\nabla}$ не является обычным вектором; например,

а) $\vec{\nabla}$ не имеет ни длины, ни направления,

б) $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ не перпендикулярен $\vec{a}$,

в) векторы $\vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}v$ – не коллинеарны, так как вектор $\vec{\nabla}u$ направлен по нормали к поверхности уровня $u = const$, вектор $\vec{\nabla}v$ направлен по нормали к поверхности уровня $v = const$;

г) если $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ действует на величину, помеченную штрихом, то следует его понимать как дифференциальный оператор $\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{\nabla} = a_1\dfrac{\partial}{\partial x} + a_2\dfrac{\partial}{\partial y} + a_3\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Эти примеры показывают, что с вектором $\vec{\nabla}$ следует обращаться с осторожностью и при отсутствии уверенности в полученном результате его следует проверить непосредственно, без использования $\vec{\nabla}$.

Пример 4.26. Вычислить $\operatorname{div}\left(r^2\vec{a}\right)$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор.

Решение. Запишем дивергенцию поля с помощью $\vec{\nabla}$: $\operatorname{div}\left(r^2\vec{a}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(r^2\vec{a}\right)$;

переменную величину r^2 перенесем к вектору $\vec{\nabla}$ и поставим за ним, следуя свойствам скалярного произведения:

$$\operatorname{div}\left(r^2\vec{a}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(r^2\vec{a}\right) = \left(\vec{\nabla}r^2\right)\cdot\vec{a}.$$

Воспользуемся свойствами градиента:

$$\operatorname{div}\left(r^2\vec{a}\right) = \left(\vec{\nabla}r^2\right)\cdot\vec{a} = \left(r^2\right)'\left(\vec{\nabla}r\right)\cdot\vec{a} = 2r\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{a} = 2\vec{r}\cdot\vec{a}.$$

Пример 4.27. Вычислить $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор.

Решение. Запишем ротор поля с помощью $\vec{\nabla}$: $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})=\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r})$.

Воспользуемся свойством двойного векторного произведения:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})=\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\times\vec{r}^{\,/}\right)=\vec{a}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}^{\,/}\right)-\vec{r}^{\,/}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right).$$

По свойству 5) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$. Кроме того, оператор $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)$ запишем в виде $\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)$ и расположим перед вектором $\vec{r}$, на который он действует. Тогда

$$\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})=3\vec{a}-\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}^{\,/}=3\vec{a}-\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\{x,y,z\}=3\vec{a}-\{a_1,\,a_2,\,a_3\}=3\vec{a}-\vec{a}=2\vec{a}.$$

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, содержащим произведение переменных

В этом случае на первый план выходят дифференциальные свойства оператора $\vec{\nabla}$ и правило дифференцирования произведения.

> Результатом действия $\vec{\nabla}$ на произведение переменных является сумма произведений; в каждом из них $\vec{\nabla}$ действует на один множитель, который отмечают штрихом и располагают справа от $\vec{\nabla}$, соблюдая правила векторной алгебры.

Пример 4.28. Доказать, используя $\vec{\nabla}$, что $\operatorname{rot}(f\vec{a})=f\operatorname{rot}\vec{a}+(\operatorname{grad}f)\times\vec{a}$, где f – функция, $\vec{a}$ – переменный вектор.

Решение. Используем правила действия с оператором $\vec{\nabla}$:

$$\operatorname{rot}(f\vec{a})=\vec{\nabla}\times\left(f^{/}\vec{a}\right)+\vec{\nabla}\times\left(f\vec{a}^{\,/}\right).$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, справа от $\vec{\nabla}$, воспользуемся свойствами векторного произведения: скаляр можно переносить от второго вектора к первому и скаляр можно выносить за знак векторного произведения. Поэтому

$$\operatorname{rot}(f\vec{a})=\vec{\nabla}\times\left(f^{/}\vec{a}\right)+\vec{\nabla}\times\left(f\vec{a}^{\,/}\right)=\left(\vec{\nabla}f^{/}\right)\times\vec{a}+f\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}^{\,/}\right)=(\operatorname{grad}f)\times\vec{a}+f\operatorname{rot}\vec{a}\,.$$

Пример 4.29. Вычислить $\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор.

Решение. Запишем ротор поля с помощью $\vec{\nabla}$: $\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)$.

Используем правила действия с оператором $\vec{\nabla}$:

$$\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})^{/}\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}^{\,/}\right).$$

Как и в предыдущем примере, чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, справа от $\vec{\nabla}$, воспользуемся свойствами векторного произведения: скаляр можно переносить от второго вектора к первому и скаляр можно выносить за знак векторного произведения. Поэтому

$$\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})^{/}\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}^{\,/}\right)=\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})^{/}\right)\times\vec{r}+(\vec{a}\cdot\vec{r})\left(\vec{\nabla}\times\vec{r}^{\,/}\right)=\vec{a}\times\vec{r}\,.$$

Здесь мы воспользовались двумя из свойств (4.2): $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}$, $\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$.

Пример 4.30. Показать, что поле $f(r)=\frac{1}{r}$ является гармоническим в пространстве R_3, а поле $f(r)=\ln r$ является гармоническим в пространстве R_2.

Решение. 1). По свойствам градиента $\operatorname{grad}\frac{1}{r}=\left(\frac{1}{r}\right)'\operatorname{grad} r=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{-1}{r^3}\vec{r}$.

Используем правила действия с оператором $\vec{\nabla}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\left(\frac{-1}{r^3}\right)'\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}^{\,/}\right).$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, справа от $\vec{\nabla}$, воспользуемся двумя свойствами скалярного произведения: скаляр можно переносить от второго вектора к первому и скаляр можно выносить за знак скалярного произведения. Поэтому

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\left(\frac{-1}{r^3}\right)'\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}^{\,/}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{-1}{r^3}\right)'\cdot\vec{r}-\frac{1}{r^3}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}^{\,/}\right)=\left(\frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{r}-\frac{3}{r^3}=0.$$

При этом мы учли, что $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$ в пространстве R_3 и $\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2$.

2). Аналогично проверьте, что поле $f(r)=\ln r$ является гармоническим в пространстве R_2, учитывая, что $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=2$ в пространстве R_2.

Пример 4.31. Пусть u, v – произвольные функции. Доказать, что поле $\vec{a}=\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)$, является соленоидальным.

Решение. Вычислим с помощью оператора $\vec{\nabla}$ дивергенцию этого поля:

$$\operatorname{div}\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)\right]=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)'\times\left(\vec{\nabla}v\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)'\right].$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, рядом с $\vec{\nabla}$, справа от него, воспользуемся следующими свойствами смешанного и векторного произведения:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\quad\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}\ .$$

Тогда $\operatorname{div}\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)'\times\left(\vec{\nabla}v\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)'\right]=\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}u\right)'\right]\cdot\left(\vec{\nabla}v\right)-\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}v\right)'\right]\cdot\left(\vec{\nabla}u\right).$

Так как поле $\vec{\nabla}u=\operatorname{grad}u$ является потенциальным, то ротор этого поля равен нулю, т.е. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}u\right)'=\operatorname{rot}\left(\vec{\nabla}u\right)'=0$. Аналогично, $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}v\right)'=0$. Поэтому $\operatorname{div}\vec{a}=0$ и, значит, поле $\vec{a}=\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)$ является потенциальным.

Библиографический список

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н. Берман. М.: Наука, 2004. 443 с.
2. Краснов М.Л. Векторный анализ: задачи и упражнения /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 160 с.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / Г.С. Бараненков [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. М.: ООО "Издательство Астрель", 2004. 495 с.
5. Минькова Р.М. Векторный анализ: учебное пособие /Р.М. Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УРФУ, 2013. 69 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике/ Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.2. 256 с.

Учебное издание

Минькова Ревекка Максовна,
Чуксина Наталия Владимировна

Векторный анализ в примерах и задачах

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой, Н.В.Чуксиной*

ИД №06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать .2013 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л.
Уч.-изд. л. 4,5 Тираж 200 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19