Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет – УПИ

Р.М. Минькова, Н.В. Чуксина

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

Руководство к решению задач
для студентов физических специальностей

Екатеринбург
УГТУ-УПИ
2008

УДК 514.742.4 (076.1)

Составители Р.М. Минькова, Н.В. Чуксина
Научный редактор доц., канд. физ.- мат. наук Р.М. Минькова

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных: руководство к решению задач для студентов физических специальностей / сост. Р.М. Минькова, Н.В. Чуксина. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. 97 с.

В данной работе разбирается решение типовых примеров и задач по следующим темам: функции нескольких переменных, двойные, тройные, криволинейные, поверхностные интегралы, их свойства и применение; скалярное поле, векторное поле и его основные характеристики: векторные линии, поток, линейный интеграл и циркуляция, дивергенция, ротор. Предлагаются задачи для самостоятельного решения.
Работа предназначена для студентов физических специальностей физико-технического факультета.

Библиогр.: 6 назв. Рис. 63.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета.

Оглавление

1. Функции нескольких переменных

Переменная u называется функцией k переменных $x_1, x_2, ...x_k$, если каждой совокупности чисел $(x_1, x_2, ...x_k)$ из множества D соответствует единственное значение переменной u. При этом принята запись $u = f(x_1, x_2, ...x_k)$, а множество D называется областью определения функции u.

1.1. Область определения и график функции

Пример 1.1. Найти и изобразить на плоскости XOY область определения функции $z = \ln\left(x^2 + y\right) + \sqrt{x - y - 1}$.

Решение. Так как логарифмическая функция определена только при положительных значениях аргумента, то $x^2 + y > 0$. Функция $\sqrt{x - y - 1}$ имеет смысл при $x - y - 1 \geq 0$. Следовательно, область определения функции $z(x, y)$ есть множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y > -x^2, \\ y \leq x - 1. \end{cases}$

Построим границы области: параболу $y = -x^2$ и прямую $y = x - 1$. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > -x^2$, расположены выше параболы. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leq x - 1$, расположены ниже прямой. Множество таких точек есть область определения функции. Эта область изображена на рис. 1.

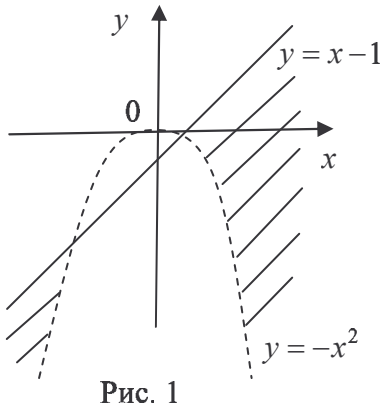

Рис. 1

Пример 1.2. Найти область определения функции

$$z = x\,y + \sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}.$$

Решение. Функция xy определена в любой точке плоскости XOY; функция $\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ имеет смысл при $x^2 + y^2 - R^2 \geq 0$, а функция $\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2}}$ — при $\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2} \geq 0$, что выполнимо при $\frac{R^2}{x^2 + y^2} \geq 1$. Т.о. область определения функции $z(x, y)$ есть множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств: $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - R^2 \geq 0 \\ \dfrac{R^2}{x^2 + y^2} \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq R^2 \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$. Область определения функции есть линия (окружность с центром в начале координат и радиусом R).

Пример 1.3. Построить график функции $z = \sqrt{4x^2 + 16x + 2y^2 - 4y + 14}$.

Решение. Заметим, что $z \geq 0$ и возведем равенство $z = \sqrt{4x^2 + 16x + 2y^2 - 4y + 14}$ в квадрат. Получим уравнение $z^2 = 4x^2 + 16x + 2y^2 - 4y + 14$ поверхности второго

порядка и приведем его к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$z^2 = 4(x^2 + 4x + 4 - 4) + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 14,$$

$$\text{или } z^2 = 4(x+2)^2 + 2(y-1)^2 - 4.$$

Запишем канонический вид уравнения

$$\frac{(x+2)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad (z \ge 0).$$

Получили верхнюю часть однополостного гиперболоида с центром в точке $A(-2,1,0)$ (рис.2).

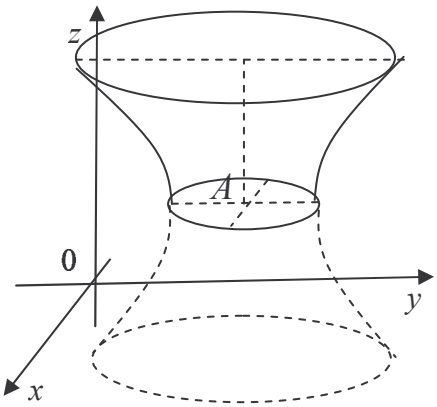

Рис. 2

1.2. Предел и непрерывность функции

Число b называют пределом функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(M)$ при $M \to M_0$, если для любой последовательности точек M_n, сходящейся к точке M_0 $(M_n \ne M_0)$, соответствующая последовательность значений функции $f(M_n)$ сходится к числу b, т.е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b \text{, если } f(M_n) \to b \text{ для } \forall M_n \to M_0 \ (M_n \ne M_0).$$

Для функции двух переменных используют и другую запись

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b.$$

Из определения следует, что предел b не зависит от способа приближения точки M к точке M_0.

Многие свойства пределов функции одной переменной остаются справедливыми и для функций многих переменных.

Функцию $f(M)$ называют ***непрерывной*** в точке M_0, если

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).}$$

Пример 1.4. Вычислить следующие пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x e^y + 2\cos x}{y e^x + \cos 3y} = \dfrac{0+2}{0+1} = 2$, так как предел элементарной функции в области ее определения равен значению функции в точке;

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sin y \cdot \cos^2 \dfrac{1}{x^2} = 0$, т.к. $\sin y$ есть функция бесконечно малая при $y \to 0$, а функция $\cos^2 \dfrac{1}{x^2}$ есть функция ограниченная и произведение функции бесконечно малой на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая;

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \left[1^\infty\right] = \left| u = x^2 + y^2 \right| = \lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e,$

здесь мы воспользовались вторым замечательным пределом;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^3} = \left| y = kx \right| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k\,x^3}{x^4+k^3x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k\,x^3}{x^3\left(x+k^3\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{\left(x+k^3\right)} = \dfrac{1}{k^2}$,

т.е. при приближении точки (x, y) к точке $(0,0)$ по прямым $y = k\,x$ предел функции равен различным значениям в зависимости от значений k и, значит, предел функции не существует;

другой способ — перейти к полярным координатам:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^3} = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix} \right| = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^3\left(\rho\cos^4\varphi+\sin^3\varphi\right)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\left(\rho\cos^4\varphi+\sin^3\varphi\right)} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi},$$

предел функции равен различным значениям в зависимости от значений φ и, значит, не существует;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix} \right| = \lim\limits_{\rho\to\infty} \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\left(1-\cos\varphi\sin\varphi\right)} = 0$,

снова воспользовались тем, что произведение бесконечно малой функции $\dfrac{1}{\rho}$ на ограниченную функцию $\dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\left(1-\cos\varphi\sin\varphi\right)}$ есть функция бесконечно малая;

6) для вычисления предела $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{x\,y}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ воспользуемся известным неравенством $x^2+y^2 \ge 2x\,y$ (оно следует из того, что $0 \le \left(x-y\right)^2 = x^2-2x\,y+y^2$). Поэтому

$$0 < \left(\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0 \quad \text{при } x\to+\infty \text{ и } \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0.$$

Пример 1.5. Исследовать функции на непрерывность и определить точки разрыва, если таковые имеются: 1) $z = \dfrac{3}{x^2+y^2}$, 2) $z = \dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Решение. 1). Функция $z = \dfrac{3}{x^2+y^2}$ элементарная, следовательно, непрерывная во всех точках, кроме точки $(0,0)$, где знаменатель обращается в нуль.

2). Функция $z = \dfrac{x-y}{x^3-y^3}$ является непрерывной всюду, где $x \ne y$, как элементарная функция. На прямой $y = x$ функция не определена и, значит, разрывна.

Пример 1.6. Доопределить, если возможно, функцию $z = \dfrac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}$ в точке, где она не определена, так, чтобы функция оказалась непрерывной в этой точке.

Решение. Функция $z(x, y)$ определена всюду, кроме точки $(0,0)$. Для непрерывности функции $z(x, y)$ в точке $(0,0)$ следует положить $z\left(0,0\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z\left(x, y\right)$. Поэто-

му вычислим предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+\frac{x^3y^3}{x^4+y^4}\right)=\left|\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{matrix}\right|=1+\lim_{\rho\to 0}\rho^2\frac{\cos^3\varphi\sin^3\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}=1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что ρ^2 есть функция бесконечно малая при $\rho\to 0$, а функция $\dfrac{\cos^3\varphi\sin^3\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$ ограничена. Полагая $z(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z(x,y)$, получим функцию $z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ непрерывную на всей плоскости XOY.

Примеры для самостоятельного решения

1). Найти и изобразить на плоскости XOY область определения функции

а) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$, б) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}$ $(r<R)$, в) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$.

Ответ: а) $\left.\begin{matrix}x\geq 0,\ y\geq 0,\\ y\leq x^2\end{matrix}\right\}$ — часть плоскости XOY, заключенная между положительной полуосью абсцисс и частью параболы $y=x^2$,

б) $r^2<x^2+y^2\leq R^2$ — часть плоскости XOY (кольцо), включая точки внешней окружности $x^2+y^2=R^2$ и исключая точки внутренней окружности $x^2+y^2=r^2$.

в) $\left\{y^2\leq 4x,\ \ x^2+y^2<1,\ \ x^2+y^2\neq 0\right\}$ — часть плоскости XOY, лежащая внутри параболы $4x=y^2$ между параболой и окружностью $x^2+y^2=1$, включая дугу параболы, исключая дугу окружности и точку $(0;0)$.

2). Построить график функции $z=3+\sqrt{25-x^2-y^2}$.

Ответ: полусфера $\begin{cases}(z-3)^2+x^2+y^2=25,\\ z\geq 3\end{cases}$ радиусом $R=5$ с центром в точке $(0,0,3)$.

3). Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y}-1}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}$.

Ответ: а) 2; б) 1; у*казание:* использовать второй замечательный предел;

в) $\dfrac{4}{3}$; у*казание:* разложить числитель и знаменатель на множители.

4). Исследовать функции на непрерывность:

а) $z=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$, б) $z=\cos\dfrac{1}{x^2+y^2-9}$, в) $z=\dfrac{x}{|y|}$, г) $z=\begin{cases}\sqrt{16-x^2-y^2}, & x^2+y^2\leq 16,\\ 0, & x^2+y^2>16.\end{cases}$

Ответ: а) линия разрыва $x^2+y^2=4$, б) линия разрыва $x^2+y^2=9$, в) линия разрыва $y=0$, г) непрерывна на всей плоскости.

1.3. Частные производные

Частные производные первого порядка

Частными производными $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ функции $f(x,y)$ называются пределы

$$\boxed{f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x},\quad f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}}.$$

Приняты и другие обозначения: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Так как в определении, например, производной f'_x при вычислении $\Delta_x f$ меняется только x при неизменных других переменных, то отсюда вытекает следующее ***правило:***

> Чтобы вычислить частную производную от функции f по одному из ее аргументов, нужно вычислить производную функции f по этому аргументу, считая другие аргументы постоянными.

Пример 1.7. Вычислить частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $(1,2)$.

Решение. Вычислим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad z'_x(1,2)=-\frac{2}{5},\quad z'_y(1,2)=\frac{1}{5}.$$

Пример 1.8. Показать, что функция $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ является решением дифференциального уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2.$

Решение. Вычислим частные производные функции $z(x,y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+x}{x^2+xy+y^2}.$$

Подставляя их в левую часть дифференциального уравнения, получим:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2+xy}{x^2+xy+y^2}+\frac{2y^2+xy}{x^2+xy+y^2}=\frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}=2,$$

что и требовалось показать.

Связь с непрерывностью

> 1). Из непрерывности функции ***не следует*** существование частных производных (***как и для функции одной переменной***).
>
> 2). Из существования частных производных функции нескольких переменных ***не следует*** непрерывность функции (***в отличие от функции одной переменной***).

Пример 1.9. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если } x^4+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^4+y^2=0\end{cases}$ разрывна в точке $(0,0)$, но имеет частные производные в этой точке.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\left|\, y=kx^2 \,\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^4}{x^4\left(1+k^2\right)}=\dfrac{k}{1+k^2}$

Предел функции равен различным значениям при различных значениях k; поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^3}$ не существует и функция разрывна в точке $(0,0)$.

Частные производные неэлементарной функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ можно вычислить, пользуясь только определением:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{0}{(\Delta x)^4}-0}{\Delta x}=0;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0}{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0.$$

Частные производные высших порядков

$$f''_{xx}=\left(f'_x\right)'_x,\quad f''_{xy}=\left(f'_x\right)'_y,\quad f''_{yx}=\left(f'_y\right)'_x,\quad f''_{yy}=\left(f'_y\right)'_y,\quad f'''_{xyx}=\left(f''_{xy}\right)'_x.$$

Другие обозначения этих же производных: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\,\partial x}$.

Производные, в которых идет дифференцирование по различным переменным, называют смешанными, например, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xyx}. ***Смешанная производная***, в случае ее непрерывности, ***не зависит от порядка дифференцирования***, например, $f''_{yx}=f''_{xy}$, $f'''_{xyx}=f'''_{xxy}=f'''_{yxx}$.

Пример 1.10. Проверить равенство $f''_{yx}=f''_{xy}$ для функции $f(x,y)=x^{y^2}$.

Решение. $\begin{aligned} f'_x &= y^2x^{y^2-1}, & f''_{xy} &= 2\,y\,x^{y^2-1}\left(1+y^2\ln x\right),\\ f'_y &= 2\,y\,x^{y^2}\ln x, & f''_{yx} &= 2\,y\,x^{y^2-1}\left(1+y^2\ln x\right).\end{aligned}$

Пример 1.11. Показать, что $f''_{yx}(0,0)\neq f''_{xy}(0,0)$ для функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0\end{cases}$$

Решение. Для отыскания $f''_{yx}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$ используем определения производных:

$$f''_{xy}(0,0)=\left(f'_x\right)'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y-0},\quad f''_{yx}(0,0)=\left(f'_y\right)'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x-0}.$$

Сначала вычислим производные первого порядка:

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{0}{x^2}-0}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y}=0,$$

$$f'_x(x,y)=\frac{\left(3x^2y-y^3\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad f'_x(0,y)=\frac{-y^5}{y^4}=-y,$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad f'_y(x,0)=\frac{x^5}{x^4}=x.$$

Теперь вычислим производные второго порядка:

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1.$$

Таким образом, $f''_{yx}(0,0)\neq f''_{xy}(0,0)$. Это происходит из-за того, что производные f''_{xy}, f''_{yx} терпят разрыв в точке $(0,0)$.

Примеры для самостоятельного решения

1). Показать, что функция $z=x^y\cdot y^x$ удовлетворяет соотношению

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y+\ln z)\cdot z.$$

2). Найти u'''_{xxy}, если $u=x\ln(xy)$.

3). Пусть $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0.\end{cases}$ Существуют ли $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$?

Ответы: 2) $u'''_{xxy}=0$, 3) $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$, $f''_{xy}(0,0)$ не существует.

1.4. Дифференцируемые функции

Функцию двух переменных $f(x,y)$ называют ***дифференцируемой*** в точке $P_0(x_0,y_0)$, если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$\boxed{\Delta f(P_0)=f'_x(P_0)\cdot\Delta x+f'_y(P_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y}$, или $\boxed{\Delta f(P_0)=f'_x(P_0)\cdot\Delta x+f'_y(P_0)\cdot\Delta y+\rho\cdot\gamma}$,

где $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ есть функции бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$; $\gamma=\gamma(\rho)$ есть функция бесконечно малая при $\rho\to 0$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Выражение $f'_x\,\Delta x + f'_y\,\Delta y$ линейно относительно Δx, Δy и является главной частью приращения функции. Это выражение называют ***дифференциалом функции двух переменных*** $f(x,y)$ и обозначают $d\,f(x,y)$. Таким образом,

$$\boxed{d\,f(x,y) = f'_x(x,y)\cdot\Delta x + f'_y(x,y)\cdot\Delta y} \text{ и } \boxed{\Delta f\left(x_0,y_0\right) = d\,f\left(x_0,y_0\right) + \gamma\cdot\rho}.$$

Так как $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то в другом виде $d\,f(x,y) = f'_x(x,y)\cdot dx + f'_y(x,y)\cdot dy$.

Если в равенстве $f\left(x,y\right) - f\left(x_0,y_0\right) = d\,f\left(x_0,y_0\right) + \gamma\cdot\rho$ пренебречь бесконечно малой $\gamma\cdot\rho = o\left(\rho\right)$, заменить $d\,f(x_0,y_0)$ его выражением и учесть, что $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, то получим приближенное равенство:

$$\boxed{f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).}$$

Это равенство позволяет ***линеаризовать*** функцию, т.е. заменить функцию $f(x,y)$ в окрестности точки $\left(x_0,y_0\right)$ ***линейной*** функцией.

Дифференциал функции при фиксированных Δx и Δy есть снова функция от переменных x и y. Ее дифференциал называют ***вторым дифференциалом*** функции $f(x,y)$ и обозначают $d^2 f(x,y)$. Таким образом,

$$d^2 f(x,y) = d\left(d\,f(x,y)\right) \text{ при фиксированных } \Delta x, \Delta y.$$

Аналогично, $d^n f(x,y) = d\left(d^{n-1} f(x,y)\right)$ при фиксированных Δx, Δy.

Формулы для вычисления $d^2 f(x,y)$ и $d^n f(x,y)$:

$$\boxed{d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y)}.$$

$$\boxed{d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)}.$$

Для дифференцируемой функции трех переменных:

$$\boxed{\Delta f\left(P_0\right) = f'_x\left(P_0\right)\cdot\Delta x + f'_y\left(P_0\right)\cdot\Delta y + f'_z\left(P_0\right)\cdot\Delta z + \rho\cdot\gamma},$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, $\gamma = \gamma\left(\rho\right)$ есть функция бесконечно малая при $\rho \to 0$;

$$\boxed{d^n f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}d\,x + \frac{\partial}{\partial y}d\,y + \frac{\partial}{\partial z}d\,z\right)^n f(x,y,z)}.$$

Пример 1.12. Линеаризовать в окрестности точки $A\left(0,-1\right)$ функцию

$$z(x,y) = \operatorname{sh}\frac{x}{y^2} + 3^{x^3+y}.$$

Решение. Вычислим значения функции и ее производных z'_x и z'_y в точке $A\left(0,-1\right)$:

$$z'_x = \operatorname{ch}\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{y^2} + 3^{x^3+y}\cdot 3x^2\ln 3, \quad z'_y = \operatorname{ch}\frac{x}{y^2}\cdot\left(-\frac{2x}{y^3}\right) + 3^{x^2+y}\cdot\ln 3,$$

$$z(0,-1)=\frac{1}{3},\quad z'_x(0,-1)=1,\quad z'_y(0,-1)=\frac{\ln 3}{3}.$$

Используя формулу $z(x,y)\approx z(x_0,y_0)+z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$, получим

$$z(x,y)=\operatorname{sh}\frac{x}{y^2}+3^{x^3+y}\approx\frac{1}{3}+x+\frac{\ln 3}{3}(y+1).$$

Пример 1.13. Найти $d^2f(2;1)$, если $f(x,y)=\dfrac{x}{x-y}$.

Решение. Воспользуемся формулой $d^2f=f''_{xx}(dx)^2+2f''_{xy}\,dxdy+f''_{yy}(dy)^2$;

для этого найдем производные второго порядка функции $f(x,y)=\dfrac{x}{x-y}$:

$$f'_x=\frac{x-y-x}{(x-y)^2}=\frac{-y}{(x-y)^2},\quad f''_{xx}=\frac{2y}{(x-y)^3},\quad f''_{xy}=-\frac{(x-y)^2+2y(x-y)}{(x-y)^4}=-\frac{x+y}{(x-y)^3},$$

$$f'_y=\frac{x}{(x-y)^2},\quad f''_{yy}=\frac{2x}{(x-y)^3}.$$

Вычислим значения производных и второго дифференциала в точке $(2;1)$:

$$f''_{xx}(2;1)=2,\ f''_{xy}(2;1)=-3,\ f''_{yy}(2;1)=4,\ d^2f(2;1)=2(dx)^2-6\,dx\,dy+4(dy)^2.$$

Пример 1.14. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ непрерывна и имеет частные производные в точке $(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Решение. Данная функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$, так как

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{matrix}\right|=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\varphi\sin\varphi=0=f(0,0).$$

Кроме того, данная функция $f(x,y)$ имеет частные производные в точке $(0,0)$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{0}{|\Delta x|}-0}{\Delta x}=0,\quad f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0}{|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0.$$

Предположим, что функция дифференцируема в точке $(0,0)$, т.е. ее полное приращение $\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ представимо в виде

$\Delta f(0,0)=f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y+\rho\cdot\gamma=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\rho\cdot\gamma=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\gamma,\ \gamma\to 0$ при $\rho\to 0$,

или $\Delta f(0,0)=\dfrac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\gamma$. Тогда $\gamma=\dfrac{\Delta x\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

При $\Delta y=\Delta x$ получим $\gamma=\dfrac{1}{2}$, то есть γ не является бесконечно малой, а функция $f(x,y)$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Итак, из непрерывности функции и существования ее частных производных не следует дифференцируемость функции; нужны дополнительные условия на функцию, например, непрерывность ее частных производных.

Примеры для самостоятельного решения

1). Вычислить дифференциал первого порядка для функции $z = y\sqrt[3]{x}$ в точке $(1,1)$.

2). Линеаризовать функцию $f(x,y) = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{y^2+1}}$ в окрестности точки $A(1,1)$.

3). Найти $d^2 f(0,0)$, если $f(x,y) = (1+x)^m \cdot (1+y)^n$.

4). Доказать, что функция $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна и имеет частные производные в точке $(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

5). Доказать, что функция $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ имеет разрывные частные производные в точке $(0,0)$, но дифференцируема в этой точке.

Ответы: 1) $dz = \dfrac{1}{3}dx + dy$; 2) $f(x,y) = \dfrac{\pi}{4} - (x-1) + \dfrac{1}{2}(y-1)$;

3) $d^2 f(0,0) = m(m-1)\,dx^2 + 2mn\,dxdy + n(n-1)\,dy^2$.

1.5. Сложные функции и их дифференцирование

Пусть $z = f(x,y)$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда суперпозиция этих трех функций, т.е. $z = f(x(t), y(t))$ есть ***сложная функция*** одной переменной t. Переменные x, y называют промежуточными переменными, переменную t называют независимой. Если $f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ – дифференцируемые функции, то производная сложной функции $z = f(x(t), y(t))$ равна

$$\boxed{z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t .}$$

Справедливо также следующее более общее правило.

> Для отыскания производной сложной функции по независимому аргументу надо ее производную по каждому промежуточному аргументу умножить на производную от этого промежуточного аргумента по независимому аргументу и сложить эти произведения.

Пример 1.15. Найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = e^{xy}$, где $y = y(x)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Решение. Т.к. $z = z(x,y)$ и $y = y(x)$, то $z = z(x, y(x))$ — сложная функция переменной x, поэтому $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cdot e^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x \cdot e^{xy}$; тогда $\dfrac{dz}{dx} = y \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Пример 1.16. Найти $\frac{dz}{dt}$ в точке $M(e,0)$, если $z=\frac{y}{x},\ x=e^t,\ y=\ln t$.

Решение. Вычислим первоначально значение параметра t в точке M, решив систему $\begin{cases} x=e^t=e, \\ y=\ln t=0; \end{cases}$ получим $t=1$. Воспользуемся формулой для вычисления производной сложной функции $z=z(x,y)$, где $x=x(t),\ y=y(t)$:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x},\ \frac{dx}{dt}=e^t,\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$, то $\frac{dz}{dt}=-\frac{y}{x^2}\cdot e^t+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{t}$.

В точке $M(e,0)$ получим $\frac{dz}{dt}=0\cdot 1+\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}$.

Пример 1.17. Показать, что функция $u=f(x-at)+g(x+at)$ удовлетворяет уравнению колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если a — постоянно, $f(x,t),\ g(x,t)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Решение. Пусть $x-at=w,\ x+at=v$, тогда $u=f(w)+g(v)$. Вычислим производные первого порядка: $u'_x=f'_w\cdot w'_x+g'_v\cdot v'_x=f'_w+g'_v$, $u'_t=f'_w\cdot w'_t+g'_v\cdot v'_t=-a\cdot f'_w+a\cdot g'_v$.

Вычислим производные второго порядка:

$$u''_{xx}=\left(f'_w+g'_v\right)'_x=f''_{ww}\cdot w'_x+g''_{vv}\cdot v'_x=f''_{ww}+g''_{vv},$$

$$u''_{tt}=\left(-a\cdot f'_w+a\cdot g'_v\right)'_t=-a\cdot f''_{ww}\cdot w'_t+a\cdot g''_{vv}\cdot v'_t=a^2 f''_{ww}+a^2 g''_{vv}.$$

Сравнивая производные u''_{xx} и u''_{tt}, получим $u''_{tt}=a^2 u''_{xx}$.

Пример 1.18. Найти $z'_x,\ z'_y,\ z''_{yy}$, если $z=f\left(x^2y,\ x^y\right)$, где $f\left(x^2y,\ x^y\right)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Решение. Данную функцию можно представить в виде: $z=f(u,v)$, где $u=x^2y,\ v=x^y$. Для отыскания производных $z'_x,\ z'_y$ воспользуемся формулами:

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x=f'_u\cdot 2xy+f'_v\cdot y\,x^{y-1},\qquad z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y=f'_u\cdot x^2+f'_v\cdot x^y\ln x.$$

Найдем z''_{yy}:

$$z''_{yy}=\left(f'_u\cdot x^2+f'_v\cdot x^y\ln x\right)'_y=\left(f'_u\right)'_y\cdot x^2+\left[\left(f'_v\right)'_y\cdot x^y+f'_v\cdot\left(x^y\right)'_y\right]\ln x=$$

$$=\left(f''_{uu}\cdot\underbrace{u'_y}_{=x^2}+f''_{uv}\cdot\underbrace{v'_y}_{=x^y\ln x}\right)\cdot x^2+\left[\left(f''_{vu}\cdot\underbrace{u'_y}_{=x^2}+f''_{vv}\cdot\underbrace{v'_y}_{=x^y\ln x}\right)\cdot x^y+f'_v\cdot x^y\ln x\right]\ln x=$$

$$=f''_{uu}\cdot x^4+2f''_{uv}\cdot x^{y+2}\ln x+f''_{vv}\cdot x^{2y}\ln^2 x+f'_v\cdot x^y\ln^2 x$$

Пример 1.19. Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, где $z=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $f(r)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Решение. Вычислим первые и вторые производные функции $z=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\,f}{d\,r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{d\,f}{d\,r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{d\,f}{d\,r}\cdot\frac{x}{r};\ \text{аналогично}\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{dr}\cdot\frac{y}{r};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}x\right)=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)x=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+x\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+x\left(-\frac{1}{r^2}\frac{df}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2 f}{dr^2}\right)\frac{x}{r}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{x^2}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2};\ \text{аналогично}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{y^2}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}.$$

Получим: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{r}\frac{df}{dr}-\frac{x^2+y^2}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{x^2+y^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}$. Так как $x^2+y^2=r^2$, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}.$$

Пример 1.20. Вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Т.к. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\ln r$, то воспользуемся результатом примера 1.19:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=(\ln r)''+\frac{1}{r}(\ln r)'=\left(\frac{1}{r}\right)'+\frac{1}{r^2}=-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}=0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Вычислить частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, где $y=e^{(x+1)^2}$.

2). Найти $\frac{dz}{dt}$ в точке $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, если $z=e^{xy}\ln(x+y)$, $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

3). Найти частные производные второго порядка функции $z=f(2x^2-3y)$, где функция $f(x,y)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

4). Показать, что функция $z=y\cdot\varphi(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$, если $\varphi(x^2-y^2)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция. Найти z''_{xy}.

5). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=f(u,v)$, где $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$, а $f(u,v)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Ответы: 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{y^2+(x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y-2(x+1)^2e^{(1+x)^2}}{y^2+(x+1)^2}=\frac{y(1-2(x+1)^2)}{y^2+(x+1)^2}$; 2) 0;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=16x^2\dfrac{d^2 f}{du^2}+4\dfrac{df}{du}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-12x\dfrac{d^2 f}{du^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{dy^2}=9\dfrac{d^2 f}{du^2}$, где $u=2x^2-3y$;

4) $z''_{xy}=-4xy^2\varphi''_{uu}+2x\varphi'_u$, $u=x^2-y^2$; 5) $z'_x=2x\cdot f'_u+y\,e^{xy}\cdot f'_v$, $z'_y=-2y\cdot f'_u+x\,e^{xy}\cdot f'_v$,

$$z''_{xx}=4x^2 f''_{uu}+4\,x\,y\,e^{xy}f''_{uv}+y^2\,e^{2xy}f''_{vv}+2f'_u+y^2\,e^{xy}f'_v.$$

1.6. Неявные функции и их дифференцирование

Неявные функции, определяемые уравнением $F(x,y)=0$

Функция, заданная в виде $y=f(x)$, называется явной функцией. Если же задано уравнение $F(x,y)=0$, не разрешенное относительно y, то оно определяет функцию $y=y(x)$, заданную неявно, при условии $F'_y\neq 0$. Например, уравнение $x+y^3-1=0$ определяет функцию $y=\sqrt[3]{1-x}$, заданную неявно.

Если неявная функция $y=y(x)$ задана уравнением $F(x,y)=0$, то для нахождения производной $y'(x)$ необязательно разрешать уравнение $F(x,y)=0$ относительно y; следует продифференцировать это уравнение по x, учитывая, что y есть функция от x.

Пример 1.21. Для функции $y(x)$, заданной уравнением $x\,e^y+y\,e^x=2$, найти $y'(0)$, $y''(0)$.

Решение. Уравнение $x\,e^y+y\,e^x=2$ задает $y=y(x)$ как неявную функцию, если $F'_y=x\,e^y+e^x\neq 0$. Продифференцируем равенство $x\,e^y+y\,e^x=2$ по переменной x два раза, считая $y=y(x)$:

а) $\left(e^y+x\,e^y y'\right)+\left(y'e^x+y\,e^x\right)=0$;

б) $\left(e^y y'+e^y y'+x\,e^y(y')^2+x\,e^y y''\right)+\left(y''e^x+y'e^x+y'e^x+y\,e^x\right)=0$.

Получим из а) $y'(x)=-\dfrac{e^y+y\,e^x}{x\,e^y+e^x}$, из б) $y''=-\dfrac{2e^y y'+2e^x y'+x\,e^y(y')^2+y\,e^x}{x\,e^y+e^x}$.

Если вместо $y'(x)$ подставить его выражение из а), то получим выражение $y''(x)$ только через x и y. Мы этого делать не будем, т.к. нам нужно вычислить $y''(0)$. Найдем первоначально $y(0)$ из заданного равенства:

$0\cdot e^y+y(0)\cdot e^0=2 \;\Rightarrow\; y(0)=2$. Тогда $y'(0)=-\dfrac{e^2+2}{1}=-\left(e^2+2\right)$, $y''(0)=2\,e^4+6e^2+2$.

Вторую производную $y''(x)$ можно было найти, дифференцируя равенство $y'=-\dfrac{e^y+y\,e^x}{x\,e^y+e^x}$ по x, учитывая, что $y=y(x)$.

Пример 1.22. В окрестности точки $(1,1)$ найти явное выражение для функции $y=y(x)$, заданной уравнением $x^2+x\,y+y^3=3$, используя формулу Тейлора 2-го порядка.

Решение. Для функции $y = y(x)$ формула Тейлора 2-го порядка имеет вид:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Найдем $y'(x)$, дифференцируя уравнение $x^2 + xy + y^3 = 3$ по переменной x, учитывая, что $y = y(x)$:

$$2x + (y + xy') + 3y^2 \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 3y^2},\ y'(1) = -\frac{3}{4}.$$

Для отыскания y'' продифференцируем равенство $y' = -\dfrac{2x + y}{x + 3y^2}$ по x, учитывая, что $y = y(x)$:

$$y'' = -\left(\frac{2x + y}{x + 3y^2}\right)'_x = -\frac{(2 + y')(x + 3y^2) - (2x + y)(1 + 6yy')}{(x + 3y^2)^2},\quad y''(1) = -\frac{31}{32}.$$

Тогда в окрестности точки $(1,1)$ явное выражение для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + xy + y^3 = 3$, по формуле Тейлора 2-го порядка имеет вид:

$$y(x) = 1 - \frac{3}{4}(x - 1) - \frac{31}{64}(x - 1)^2 + o\left((x - 1)^2\right).$$

Неявные функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ при условии $F'_z \neq 0$ определяет функцию $z = z(x, y)$, заданную неявно.

Для отыскания частной производной z'_x функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, следует продифференцировать это уравнение по x (а для отыскания z'_y продифференцировать уравнение по y), учитывая, что x, y – независимые переменные, а z – функция от x, y.

Пример 1.23. Найти первый дифференциал неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 5$. Линеаризовать в окрестности точки $(1; 1)$ эту неявную функцию, если $z(1; 1) = 1$.

Решение. Вычислим полный дифференциал правой и левой частей уравнения $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 5$:

$$3z^2dz + 6xy\,dx + 3x^2dy + z\,dx + x\,dz + 2yz^2dy + 2y^2z\,dz + dy - 2dx = 0,$$

$$\text{или } (6xy + z - 2)\,dx + (3x^2 + 2yz^2 + 1)\,dy + (3z^2 + x + 2y^2z)\,dz = 0.$$

Разрешая полученное уравнение относительно dz, получим

$$dz = \frac{2 - z - 6xy}{3z^2 + x + 2y^2z}\,dx - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}\,dy.$$

Заметим, что дроби, стоящие при dx и dy, являются частными производными

соответственно $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. В точке $(1;1)$ с учетом того, что $z(1;1)=1$, получим: $dz(1;1)=-\frac{5}{6}dx-dy=-\frac{5}{6}(x-1)-(y-1)$. Тогда $z(x,y)\approx z(1;1)+dz(1;1)$, т.е.

$$z(x,y)\approx 1-\frac{5}{6}(x-1)-(y-1).$$

Пример 1.24. Показать, что неявная функция $z=z(x,y)$, определяемая уравнением $F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)=0$, удовлетворяет соотношению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Решение. Уравнение $F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)=0$ определяет неявную функцию $z(x,y)$. Равенство $F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)=0$ представим в виде $F(u,v)=0$, где $u=\frac{x}{y}$, $v=\frac{y}{z}$. Продифференцируем равенство $F(u,v)=0$ по x по правилу дифференцирования сложной функции, имея в виду, что z – функция от x,y и x,y – независимые переменные:

$$F'_u\cdot u'_x+F'_v\cdot v'_x=F'_u\cdot\frac{1}{y}+F'_v\cdot\left(-\frac{y}{z^2}z'_x\right)=0 \quad\Rightarrow\quad z'_x=\frac{F'_u}{F'_v}\cdot\frac{z^2}{y^2}.$$

Аналогично дифференцируя равенство $F(u,v)=0$ по y, получим

$$F'_u\cdot u'_y+F'_v\cdot v'_y=F'_u\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+F'_v\cdot\frac{z-yz'_y}{z^2}=0 \quad\Rightarrow\quad z'_y=\frac{1}{y}\cdot\left(z-\frac{xz^2}{y^2}\cdot\frac{F'_u}{F'_v}\right).$$

Подставим полученные выражения для частных производных в левую часть уравнения: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{F'_u}{F'_v}\cdot\frac{z^2}{y^2}+y\cdot\frac{1}{y}\cdot\left(z-\frac{xz^2}{y^2}\cdot\frac{F'_u}{F'_v}\right)=z$, что и требовалось показать.

Неявные функции, определяемые системой уравнений

1). Система ***двух*** уравнений $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ при условии $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\neq 0$ определяет ***две*** функции y,z от переменной x, т.е. $y=y(x)$, $z=z(x)$.

2). Система ***трех*** уравнений $\begin{cases}F(x,y,z,u,v)=0,\\ G(x,y,z,u,v)=0,\\ R(x,y,z,u,v)=0\end{cases}$ при условии $\frac{D(F,G,R)}{D(z,u,v)}\neq 0$ определяет ***три*** функции z, u, v от переменных x, y, т.е.

$$z=z(x,y),\quad u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

Пример 1.25. Найти x'_z, y'_z, x''_{zz} при $x=1$, $y=-1$, $z=2$, если $\begin{cases}x+y+z=2,\\ x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2.\end{cases}$

Решение. Система ***двух*** уравнений определяет ***две*** функции, например, $x(z)$, $y(z)$, если $\frac{D(F,G)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=2y-2x\neq 0,\quad y\neq x.$

Продифференцируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} dx+dy+dz=0, \\ 2x\,dx+2y\,dy-z\,dz=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} dx+dy=-dz, \\ 2x\,dx+2y\,dy=z\,dz. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение сначала на $(-2y)$, а потом на $(-2x)$ и складывая со вторым уравнением, получим:

$$\begin{cases} (2x-2y)\,dx=(2y+z)\,dz, \\ (2y-2x)\,dy=(z+2x)\,dz. \end{cases}$$ Так как $x-y\neq 0$, то $\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{2y+z}{2x-2y}$, $\dfrac{dy}{dz}=-\dfrac{z+2x}{2x-2y}$.

Найдем x''_{zz}, дифференцируя равенство $x'_z=\dfrac{2y+z}{2x-2y}$ по z, учитывая, что x, y есть функции от переменной z: $x''_{zz}=\dfrac{(2y'_z+1)\cdot(2x-2y)-(2y+z)\cdot(2x'_z-2y'_z)}{(2x-2y)^2}$.

При $x=1$, $y=-1$, $z=2$ получим: $x'_z=0$, $y'_z=-1$, $x''_{zz}=-\dfrac{1}{4}$.

Пример 1.26. Найти производные первого порядка от функций u, v, определяемых системой уравнений $\begin{cases} u+v=x+y, \\ y\sin u-x\sin v=0. \end{cases}$

Решение. Система ***двух*** уравнений определяет ***две*** функции, например, u, v от остальных переменных, т.е. от x, y при условии, что

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y\cos u & -x\cos v \end{vmatrix}=-x\cos v-y\cos u\neq 0 .$$

Дифференцируя уравнения системы, получим

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy, \\ y\cos u\,du-x\cos v\,dv=\sin v\,dx-\sin u\,dy. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем:

$$du=\frac{x\cos v+\sin v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy;\quad dv=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy.$$

Следовательно,

$$u'_x=\frac{x\cos v+\sin v}{x\cos v+y\cos u},\quad u'_y=\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u},\quad v'_x=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u},\quad v'_y=\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Найти $dy(0)$, $d^2y(0)$ для неявной функции $y(x)$, определенной уравнением $x^3y^2-xy^2+5x+y=0$.

2). Найти d^2z в точке $(1,0)$ для неявной функции $z(x,y)$, определяемой уравнением $xz^5+y^3z-x^3=0$, если $z(1,0)=1$.

3). Показать, что неявная функция $z(x,y)$, определяемая уравнением $z = y \cdot f(z/x)$, удовлетворяет соотношению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

Указание: ввести вспомогательную переменную $u = \dfrac{z}{x}$; учесть, что $z = z(x,y)$; при подстановке $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в равенство $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ учесть, что $f(u) = \dfrac{z}{y}$.

4). Найти x'_z, y'_z, если $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

5). Найти du, dv при $x = 1$, $y = 1$, $u = 0$, $v = \dfrac{\pi}{4}$, если $\begin{cases} e^{u/x}\cos\dfrac{v}{y} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}, \\ e^{u/x}\sin\dfrac{v}{y} = \dfrac{y}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Ответы: 1) $dy(0) = -5dx$, $d^2y(0) = 0$; 2) $d^2f(1,0) = -\dfrac{6}{25}(dx)^2$,

4) $x'_z = \dfrac{y-z}{x-y}$, $y'_z = \dfrac{z-x}{x-y}$; 5) $du = \dfrac{1}{2}(dx + dy)$, $dv = -\dfrac{1}{2}dx + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)dy$.

1.7. Геометрические приложения

Касательная плоскость и нормаль к поверхности $F(x,y,z) = 0$

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$. Вектор

$$\boxed{\vec{N} = \left\{F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0)\right\}}$$

является ***нормальным вектором*** касательной плоскости, проведенной в точке касания M_0. Зная нормальный вектор $\vec{N} = \left\{F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0)\right\}$ касательной плоскости и точку касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$, можно записать ***уравнение касательной плоскости*** к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке M_0:

$$\boxed{F_x'(M_0)\cdot(x - x_0) + F_y'(M_0)\cdot(y - y_0) + F_z'(M_0)\cdot(z - z_0) = 0.}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания, называется нормалью к поверхности. Нормальный вектор касательной плоскости $\vec{N} = \left\{F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0)\right\}$ является направляющим вектором нормали. Поэтому ***уравнение нормали*** к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке M_0 имеет вид:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}.}$$

Пример 1.27. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 5{,}5$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$.

Решение. В данной задаче точка касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не задана, ее нужно найти. Вычислим нормальный вектор касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z) = 0$, где $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 5{,}5$:

$$\vec{N}=\left\{F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0)\right\}=\{2x_0, 4y_0,\ 2z_0\}.$$

Вычислим нормальный вектор заданной плоскости $x-y+2z=0$: $\vec{N}_1=\{1,-1,\ 2\}$.

Из условия параллельности плоскостей следует, что векторы $\vec{N}$, $\vec{N}_1$ коллинеарны, а значит, их координаты пропорциональны:

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{2z_0}{2}=t\text{, или } x_0=\frac{t}{2},\quad y_0=-\frac{t}{4},\quad z_0=t.$$

Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит на поверхности, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, т.е. $\frac{t^2}{4}+\frac{2t^2}{16}+t^2=5{,}5$. Отсюда получим $t=\pm 2$ и две точки касания $M_0\left(1,-\frac{1}{2},2\right)$, $M_0'\left(-1,\frac{1}{2},-2\right)$. В качестве нормального вектора касательной плоскости возьмем вектор $\vec{N}_1=\{1,-1,\ 2\}$. Запишем уравнения касательных плоскостей:

$$(x-1)-\left(y+\frac{1}{2}\right)+2(z-2)=0 \quad \text{и} \quad (x+1)-\left(y-\frac{1}{2}\right)+2(z+2)=0.$$

Пример 1.28. Показать, что поверхности $x+2y-\ln z+4=0$ и $x^2-xy-8x+z+5=0$ касаются друг друга (т.е. имеют общую касательную плоскость) в точке $A(2,-3,1)$.

Решение. Убедимся, что точка A принадлежит обеим поверхностям, т.е. координаты точки A удовлетворяют двум заданным уравнениям:

$$2-6-\ln 1+4=0,\quad 4+6-16+1+5=0.$$

Обозначим нормальный вектор касательной плоскости к поверхности $x+2y-\ln z+4=0$ через $\vec{N}_1$, а к поверхности $x^2-xy-8x+z+5=0$ через $\vec{N}_2$; тогда

$$\vec{N}_1=\{F'_x(A),\ F'_y(A),\ F'_z(A)\}=\{1,\ 2,-1\},\quad \vec{N}_2=\{2x-y-8,\ -x,\ 1\}_A=\{-1,-2,\ 1\}.$$

Запишем уравнения касательных плоскостей:

$(x-2)+2(y+3)-(z-1)=0$, или $x+2y-z+5=0$ (для первой поверхности),

$-(x-2)-2(y+3)+(z-1)=0$, или $x+2y-z+5=0$ (для второй поверхности).

Итак, поверхности имеют общую касательную плоскость $x+2y-z+5=0$ в точке касания A.

Пример 1.29. Показать, что касательная плоскость к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ отсекает на координатных осях отрезки, сумма которых равна a.

Решение. Запишем нормальный вектор касательной плоскости, проведенной к поверхности в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, и уравнение касательной плоскости:

$$\vec{N}=\left\{\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}}\right\},\qquad \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0} \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a}\,.$$

Найдем отрезки, отсекаемые этой плоскостью на координатных осях:

при $y=z=0$ получим $x=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}$;

при $x=z=0$ получим $y=\sqrt{a}\cdot\sqrt{y_0}$;

при $x=y=0$, получим $z=\sqrt{a}\cdot\sqrt{z_0}$.

Сумма этих отрезков равна

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{y_0}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{z_0}=\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a\,.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрически

Для задания кривой параметрическими уравнениями требуется один параметр; для задания поверхности требуется два параметра. Пусть поверхность задана параметрическими уравнениями:

$$x=x(u,v),\ \ y=y(u,v),\ \ z=z(u,v) \quad \text{или} \quad \vec{r}=\vec{r}(u,v).$$

Нормальный вектор $\vec{N}$ касательной плоскости (рис. 3) перпендикулярен векторам $\vec{r}_u{}'(u_0,v_0)$, $\vec{r}_v{}'(u_0,v_0)$; поэтому

$$\boxed{\vec{N}=\vec{r}_u{}'(u_0,v_0)\times\vec{r}_v{}'(u_0,v_0)}.$$

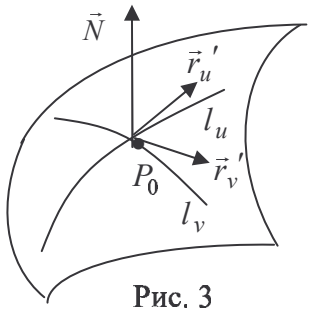

Рис. 3

Зная нормальный вектор $\vec{N}$ касательной плоскости, можно записать уравнения касательной плоскости и нормали.

Пример 1.30. Составить уравнение касательной плоскости, проведенной в точке $P_0(0,2,0)$ к поверхности $x=u+v,\ \ y=u^2+v,\ \ z=u^3+v^3$.

Решение. Найдем значения параметров u,v, соответствующих точке P_0 из системы:

$$0=u+v,\ \ 2=u^2+v,\ \ 0=u^3+v^3.$$

Из первых двух уравнений получим два решения $\begin{cases} u=2, \\ v=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} u=-1, \\ v=1, \end{cases}$ но первое решение не удовлетворяет третьему уравнению. Итак, $u=-1,\ v=1$ для точки $P_0(0,2,0)$.

Найдем векторы $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$ и нормальный вектор $\vec{N}$ касательной плоскости:

$$\vec{r}_u{}'=\{x'_u,\,y'_u,\,z'_u\}=\left\{1,2u,\,3u^2\right\}\Big|_{P_0}=\{1,-2\,,\,3\},$$

$$\vec{r}_v{}'=\{x'_v,\,y'_v,\,z'_v\}=\left\{1,\,1,\,3v^2\right\}\Big|_{P_0}=\{1,\,1,\,3\}.$$

$$\vec{N}=\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-9\vec{i}+0\vec{j}+3\vec{k}\,.$$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$$-9(x-0)+0(y-2)+3(z-0)=0 \quad \text{или} \quad 3x-z=0\,.$$

Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой

Рассмотрим два способа задания пространственной кривой.

1). Пусть пространственная кривая L задана параметрически в векторной форме $\vec{r}=\vec{r}(t)$ или в координатной форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

Тогда вектор $\vec{r}\,'(t_0)=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ является направляющим вектором касательной прямой к линии L в точке P_0. Поэтому канонические ***уравнения касательной*** прямой к линии L в точке P_0 имеют вид:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.}$$

Вектор $\vec{r}\,'(t_0)=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ коллинеарен касательной прямой и, значит, перпендикулярен нормальной плоскости. Поэтому ***уравнение нормальной плоскости*** к линии L в точке P_0 имеет вид:

$$\boxed{x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0}.$$

2). Рассмотрим другой способ задания пространственной кривой.

Кривую можно задать как пересечение двух поверхностей $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$ при условии, что ранг матрицы Якоби $\begin{pmatrix}F_x' & F_y' & F_z'\\ G_x' & G_y' & G_z'\end{pmatrix}$ равен двум.

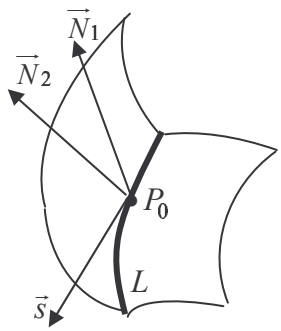

Рис. 4

Касательный вектор $\vec{s}$ к линии L пересечения поверхностей (рис.4) перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}_1=\{F_x', F_y', F_z'\}_{P_0}$ одной поверхности и перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}_2=\{G_x', G_y', G_z'\}_{P_0}$ другой поверхности, а потому $\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$. Вектор $\vec{s}$ является направляющим вектором касательной к линии L и нормальным вектором для нормальной плоскости к линии L. Зная их, можно записать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии L.

Пример 1.31. Определяет ли система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ x=y\end{cases}$ кривую? Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к этой кривой в точке $A\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

Решение. Составим матрицу Якоби в точке P_0:

$$\begin{pmatrix}F_x' & F_y' & F_z'\\ G_x' & G_y' & G_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2y & -2z\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}_{P_0}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\sqrt{2}\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, поэтому исходная система уравнений определяет кривую в пространстве. Найдем направляющий вектор касательной к этой кривой в точке P_0:

$$\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_x' & F_y' & F_z'\\ G_x' & G_y' & G_z'\end{vmatrix}_{P_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & -2\sqrt{2}\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-2\sqrt{2}\,\vec{i}-2\sqrt{2}\,\vec{j}-4\vec{k}.$$

Направляющим вектором касательной будет являться также вектор

$$\vec{s}_0=\frac{-\vec{s}}{2\sqrt{2}}=\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}=\left\{1,\,1,\,\sqrt{2}\right\}.$$

Запишем уравнения касательной прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ и нормальной плоскости $1(x-1)+1(y-1)+\sqrt{2}\left(z-\sqrt{2}\right)=0$ или $x+y+\sqrt{2}\,z=4$.

Примеры для самостоятельного решения

1. На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости YOZ.

Ответ: $(-4,2,0)$, $(4,-2,0)$.

Указание: учесть, что точка, в которой касательная плоскость параллельна плоскости YOZ, лежит на поверхности.

2. В какой точке нормаль к поверхности $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{16}=1$ образует равные углы с осями координат? *Ответ:* $\left(\pm 2/3,\ \pm 8/3,\ \pm 8/3\right)$.

Указание: направляющий вектор нормали имеет равные координаты.

3. Записать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $\begin{cases}y=2x^2,\\ y+1=z^2\end{cases}$ в точке $A\left(1,\,2,\sqrt{3}\right)$. *Ответ*: $\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{y-2}{4\sqrt{3}}=\dfrac{z-\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}\,x+4\sqrt{3}\,y+2z=11\sqrt{3}$.

4. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к линии $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ в точке $A(2,4,5)$? *Ответ*: $\pi/4$.

1.8. Локальный экстремум функции

Для исследования функции на экстремум нужно

1) найти точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют (их называют критическими точками);
2) исследовать функцию в критических точках, используя достаточные условия экстремума или определение экстремума.

Рассмотрим достаточные условия экстремума.

Первое достаточное условие экстремума функции n переменных

Пусть M_0 критическая точка функции $f(M)$ и функция $f(M)$ дважды дифференцируема в окрестности точки M_0. Тогда

1) если $d^2 f(M_0) > 0$, то функция $f(M)$ в точке M_0 имеет минимум,

2) если $d^2 f(M_0) < 0$, то функция $f(M)$ в точке M_0 имеет максимум,

3) если $d^2 f(M_0)$ меняет знак, то функция $f(M)$ в точке M_0 экстремума не имеет,

4) если $d^2 f(M_0) = 0$, то нужно дополнительное исследование (в частности, при $d^3 f(M_0) \neq 0$ в точке M_0 экстремума нет).

Второе достаточное условие экстремума функции n переменных

Пусть M_0 – критическая точка функции $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(M_0) = A_{ik}$,

$$\Delta_1 = A_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$ Тогда

1) если $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ – положительны, то M_0 – точка минимума функции $f(M)$;

2) если знаки $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ чередуются, начиная со знака минус, то M_0 – точка максимума функции $f(M)$.

Замечание. Для функции двух переменных $f(x, y)$ второе достаточное условие экстремума выглядит следующим образом:

1) если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, то (x_0, y_0) точка минимума функции $f(x, y)$,

2) если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, то (x_0, y_0) точка максимума функции $f(x, y)$,

3) если $\Delta_2 < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.

Пример 1.32. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.

Решение. Найдем критические точки функции из условия: $z'_x = 0$, $z'_y = 0$.

Решим систему $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 51 = 0, \\ z'_y = 6xy - 24 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ 2xy = 8. \end{cases}$

Сложив уравнения, получим $(x + y)^2 = 25$ или $x + y = \pm 5$.

Решив системы $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 4 \end{cases}$, получим критические точки:

$$M_1(1,4),\ M_2(4,1),\ M_3(-1,-4),\ M_4(-4,-1).$$

Проверим выполнение достаточных условий в этих точках, для этого вычислим производные второго порядка и определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2).$$

В точках $M_1(1,4)$ и $M_3(-1,-4)$ имеем $\Delta_2 = 36\cdot(-15) < 0$; следовательно, в этих точках экстремума нет.

В точках $M_2(4,1)$ и $M_4(-4,-1)$ имеем $\Delta_2 = 36\cdot 15 > 0$, экстремум есть, причем в точке $M_2(4,1)$ — минимум, т.к. $\Delta_1 = z''_{xx}(M_2) = 24 > 0$; в точке $M_4(-4,-1)$ – максимум, т.к. $\Delta_1 = -24 < 0$, причем $z_{\min}(4;1) = -152$, $z_{\max}(-4;-1) = 152$.

Пример 1.33. Исследовать на экстремум функцию $z = y^5 - (x-y)^2$.

Решение. Найдем критические точки, решив систему

$$\begin{cases} z'_x = -2(x-y) = 0, \\ z'_y = 5y^4 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = y, \\ 5y^4 = 0. \end{cases}$$

Получим критическую точку $M_0(0,0)$.

Вычислим $z''_{xx} = -2$; $z''_{xy} = 2$; $z''_{yy} = 20y^3 - 2$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 20y^3 - 2 \end{vmatrix} = 4 - 40y^3 - 4 = -40y^3$.

Так как $\Delta_2 = 0$ в точке $M_0(0,0)$, то достаточный признак на вопрос об экстремуме ответа не дает. Исследуем критическую точку на экстремум, используя определение экстремума. Для этого вычислим значение $z(0,0) = 0$ и сравним его со значениями функции $z(x,y)$ в окрестности точки $(0,0)$; в частности, вдоль прямой $y = x$: $z(x,x) = x^5 > 0$ при $x > 0$ и $z(x,x) < 0$ при $x < 0$.

Итак, $z(x,x) > z(0,0)$ при $x > 0$ и $z(x,x) < z(0,0)$ при $x < 0$, следовательно, в точке $(0,0)$ нет экстремума.

Пример 1.34. Найти экстремум функции $u(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $\left(x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right)$.

Решение. Найдем критические точки функции, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} u'_x = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0, \\ u'_y = \dfrac{2y}{4x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0, \\ u'_z = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 2, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x} = \dfrac{z^2}{y^2}, \\ \dfrac{z}{y} = \dfrac{1}{z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 2, \\ \dfrac{z}{y} = 1, \\ z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Итак, критическая точка $M(1/2, 1, 1)$. Проверим выполнение достаточных условий. Вычислим вторые производные в точке M и определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$A_{11} = u''_{xx}(M) = \left.\frac{2y^2}{4x^3}\right|_M = 4; \quad A_{12} = A_{21} = u''_{xy}(M) = -\left.\frac{2y}{4x^2}\right|_M = -2; \quad A_{13} = A_{31} = u''_{xz} = 0;$$

$$A_{22} = u''_{yy} = \left.\left(\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\right)\right|_M = 3; \quad A_{23} = A_{32} = u''_{yz} = -\left.\frac{2z}{y^2}\right|_M = -2; \quad A_{33} = u''_{zz} = \left.\left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right)\right|_M = 6;$$

$$\Delta_1 = A_{11} = 4 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Так как все $\Delta_i > 0\ (i = 1,2,3)$, то точка $M(1/2,1,1)$ есть точка минимума; причем

$$u_{\min} = u(1/2,1,1) = 4.$$

Пример 1.35. Исследовать на экстремум функцию

$$u(x,y,z) = x\,y\,z(4 - 3x - 2y - z)\ \ (x > 0,\ y > 0).$$

Решение. Найдем критические точки функции, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} u'_x = y\,z(4 - 3x - 2y - z) - 3\,x\,y\,z = 0, \\ u'_y = x\,z(4 - 3x - 2y - z) - 2\,x\,y\,z = 0, \\ u'_z = x\,y(4 - 3x - 2y - z) - x\,y\,z = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

а) При $z \neq 0$ получим

$$\begin{cases} (4 - 3x - 2y - z) = 3x, \\ (4 - 3x - 2y - z) = 2y, \\ (4 - 3x - 2y - z) = z, \end{cases} \Rightarrow 3x = 2y = z \Rightarrow (4 - 3x - 3x - 3x) = 3x \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3, \\ y = 1/2, \\ z = 1, \end{cases} \ M_1(1/3, 1/2, 1).$$

Для исследования критической точки M_1 на экстремум найдем производные второго порядка в этой точке

$$A_{11} = u''_{xx} = -6\,y\,z = -3, \qquad A_{22} = u''_{yy} = -4x\,z = -4/3, \qquad A_{33} = u''_{zz} = -2\,x\,y = -1/3,$$

$$A_{12} = u''_{xy} = z\underbrace{(4 - 3x - 2y - z)}_{=3x} - 2\,y\,z - 3\,x\,z = -2\,y\,z = -1, \qquad A_{21} = u''_{yx} = u''_{xy} = A_{12},$$

$$A_{13} = u''_{xz} = y\underbrace{(4 - 3x - 2y - z)}_{=3x} - y\,z - 3\,x\,y = -\,y\,z = -1/2, \qquad A_{31} = u''_{zx} = u''_{xz} = A_{13},$$

$$A_{23} = u''_{yz} = x\underbrace{(4 - 3x - 2y - z)}_{=z} - x\,z - 2\,x\,y = -2\,x\,y = -1/3, \qquad A_{32} = u''_{zy} = u''_{yz} = A_{23}.$$

Вычислим определители

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1/2 \\ -1 & -4/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -1/2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4/3 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_1 = -3.$$

Так как знаки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ чередуются, начиная со знака минус, то M_1 – точка максимума функции $u(M)$.

б) При $z = 0$ первое и второе уравнения исходной системы (1) автоматически выполняются, а из третьего уравнения получаем множество точек $M(x,y,0)$ таких, что $3x + 2y = 4$.

Вычислим производные второго порядка в точках $M(x,y,0)$, учитывая, что $4 - 3x - 2y = 0,\ \ z = 0$:

$$A_{11} = u''_{xx} = -6\,y\,z = 0, \quad A_{22} = u''_{yy} = -4x\,z = 0, \qquad A_{33} = u''_{zz} = -2\,x\,y,$$

$$A_{12} = u''_{xy} = z(4 - 3x - 2y - z) - 2\,y\,z - 3\,x\,z = 0, \qquad A_{21} = u''_{yx} = u''_{xy} = A_{12} = 0,$$

$$A_{13}=u''_{xz}=y(4-3x-2y-z)-yz-3xy=-3xy,\qquad A_{31}=u''_{zx}=u''_{xz}=A_{13},$$

$$A_{23}=u''_{yz}=x(4-3x-2y-z)-xz-2xy=-2xy,\qquad A_{32}=u''_{zy}=u''_{yz}=A_{23}.$$

Так как $\Delta_2=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$, то второе достаточное условие экстремума неприменимо. Применим первое достаточное условие экстремума. Для этого оценим знак d^2u:

$$d^2u=A_{11}(dx)^2+A_{22}(dy)^2+A_{33}(dz)^2+2A_{12}\,dx\,dy+2A_{13}\,dx\,dz+2A_{23}\,dy\,dz=$$

$$=-2xy(dz)^2-6xy\,dx\,dz-4xy\,dy\,dz=-2xy\;dz\,(dz+3dx+2dy).$$

При $dy=-3dx/2$ имеем $d^2u=-2xy\,(dz)^2<0.$ При $dy=dx=-dz$ имеем $d^2u=8xy\,(dz)^2>0.$ Так как $d^2u(M)$ меняет знак, то функция u в точках $M(x,y,0)$ экстремума не имеет.

Пример 1.36. Исследовать на экстремум неявную функцию $z=z(x,y)$, определяемую уравнением $e^z-xyz=e$.

Решение. Функция $z=z(x,y)$ задана неявно. Найдем z'_x и z'_y, продифференцировав равенство $e^z-xyz=e$ сначала по x, потом по y:

$$e^z z'_x-yz-xyz'_x=0\;\Rightarrow\;z'_x=\frac{yz}{e^z-xy};\qquad e^z z'_y-xz-xyz'_y=0\;\Rightarrow\;z'_y=\frac{xz}{e^z-xy}.$$

Критические точки найдем, решив систему

$$\begin{cases}z'_x=\dfrac{yz}{e^z-xy}=0,\\ z'_y=\dfrac{xz}{e^z-xy}=0,\\ e^z-xyz=e,\end{cases}\;\Rightarrow\;\begin{cases}yz=0,\\ xz=0,\\ e^z-xyz=e,\end{cases}\;\Rightarrow\;\begin{cases}y=0,\\ x=0,\\ z=1.\end{cases}$$

Критическая точка $M(0,0,1)$. Вычислим $A=z''_{xx}$, $B=z''_{xy}$, $C=z''_{yy}$ в точке $M(0,0,1)$:

$$A=z''_{xx}=\frac{yz'_x(e^z-xy)-yz(e^z z'_x-y)}{(e^z-xy)^2}\Big|_M=0,\quad B=z''_{xy}=\frac{(z+yz'_y)(e^z-xy)-yz(e^z z'_y-x)}{(e^z-xy)^2}\Big|_M=\frac{1}{e},$$

$$C=z''_{yy}=\frac{xz'_y(e^z-xy)-xz(e^z z'_y-x)}{(e^z-xy)^2}\Big|_M=0.$$

Так как $\Delta=AC-B^2=-\dfrac{1}{e^2}<0$, то в точке M экстремума нет.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$; 2) $z^3-xyz=8$; 3) $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

Ответы: 1) $z_{\min}(2,1)=-28$, $z_{\max}(-2,-1)=28$, в точках $(1,2)$ и $(-1,-2)$ экстремума нет; 2) в точке (0,0,2) экстремума нет; 3) $u_{\min}=u(-2/3,-1/3,1)=-4/3$.

1.9. Глобальный экстремум функции

Требуется найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции не в окрестности точки (локальный экстремум), а в некоторой ограниченной замкнутой области (глобальный экстремум). Наибольшее (наименьшее) значение функции в такой области может достигаться либо внутри области в точках локального экстремума (а значит, в критических точках), либо на границе области.

Поэтому алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(M)$ в области D состоит в следующем:

1) найти критические точки функции $f(M)$, принадлежащие области D, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;
3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Пример 1.37. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(4 - x - y)$ в области $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 6$.

Решение. 1). Построим область (рис.5). Найдем критические точки функции $z(x, y)$ ***внутри области***, решив систему:

$$\begin{cases} z_x' = xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ z_y' = x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0, \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \quad z(2, 1) = 4.$$

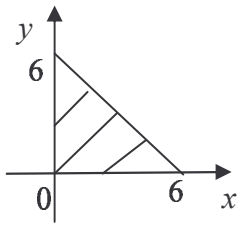

Рис.5

2). Исследуем функцию ***на границе***. На участках границы области, где $x = 0,\ y = 0,$ функция $z = x^2 y(4 - x - y)$ равна нулю: $z(0, y) = 0,\ \ z(x, 0) = 0$. На участке границы области, где $x + y = 6,$ функция равна $z = -2x^2(6 - x) = -12x^2 + 2x^3 = f(x)$. Найдем критические точки функции $f(x)$ на интервале $(0, 6)$:

$$f'(x) = -24x + 6x^2 = 0 \ \Rightarrow\ x = 4;\quad z(4, 2) = f(4) = -64.$$

Тогда наибольшее значение функции есть $z = 4$, оно достигается в точке $(2, 1)$; наименьшее значение есть $z = -64$, оно достигается на границе области в точке $(4, 2)$.

Пример 1.38. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{-x^2 - y^2}\left(2x^2 + 3y^2\right)$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Решение. 1). Найдем критические точки функции в круге:

$$\begin{cases} z_x' = e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(2x^2 + 3y^2\right) + e^{-x^2-y^2} \cdot 4x = 2xe^{-x^2-y^2}\left(2 - 2x^2 - 3y^2\right) = 0, \\ z_y' = e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(2x^2 + 3y^2\right) + e^{-x^2-y^2} \cdot 6y = 2ye^{-x^2-y^2}\left(3 - 2x^2 - 3y^2\right) = 0; \end{cases}$$

отсюда получим системы $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0, \\ 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$

и критические точки $M_1(0,0),\ M_2(0, \pm 1),\ M_3(\pm 1, 0)$.

Эти точки лежат в заданном круге и $z(0,0)=0$, $z(0,\pm1)=3e^{-1}$, $z(\pm1,0)=2e^{-1}$.

2). На границе области имеем $x^2+y^2=4$, поэтому функция z примет вид: $z=e^{-x^2-y^2}\left(2x^2+3y^2\right)=e^{-4}\left(8+y^2\right)$, $y\in[-2,2]$. Так как $y^2\in[0,4]$, то на границе наименьшее значение $z=8e^{-4}$ при $y=0$, наибольшее значение $z=12e^{-4}$ при $y=\pm2$.

3). Из получившихся значений функции

$$z(0,0)=0;\ z(0,\pm1)=3e^{-1};\ z(\pm1,0)=2e^{-1};\ z(\pm2,0)=8e^{-4};\ z(0,\pm2)=12e^{-4}$$

выберем наибольшее значение $z=\frac{3}{e}$ и наименьшее значение $z=0$.

1.10. Условный экстремум функции

Рассмотрим экстремум функции нескольких переменных, когда эти переменные связаны некоторыми условиями – уравнениями связи. Для отыскания условного экстремума используют два метода.

Сведение к безусловному экстремуму

Пусть требуется найти экстремум функции $u=f(x,y,z)$ при наличии связи $F(x,y,z)=0$. Если ***из уравнения связи легко выразить одну из переменных***, например z, через две другие переменные $z=\varphi(x,y)$, то задача сведется к поиску безусловного экстремума функции $u=f\left(x,y,\varphi(x,y)\right)$.

Пример 1.39. Найти параллелепипед данного объема V, имеющий наименьшую площадь поверхности S.

Решение. Обозначим линейные размеры параллелепипеда через x,y,z. Тогда объем $V=xyz$, а площадь поверхности $S=2xy+2xz+2yz$. Требуется найти минимум функции $S=2xy+2xz+2yz$, при условии, что $V=xyz$. Из уравнения связи выразим z: $z=\frac{V}{xy}$ и подставим в функцию S: $S=2xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}$. Найдем критические точки этой функции из системы:

$$\begin{cases} S'_x==2y-\dfrac{2V}{x^2}=0, \\ S'_y==2x-\dfrac{2V}{y^2}=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y=V, \\ xy^2=V, \end{cases} \Rightarrow x=y=\sqrt[3]{V}.$$

Проверим выполнение достаточных условий для функции $S=2xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}$ в полученной критической точке $M\left(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}\right)$:

$$A=S''_{xx}=\frac{4V}{x^3}\Big|_M=4,\quad B=S''_{xy}=2,\quad C=S''_{yy}=\frac{4V}{y^3}\Big|_M=4;\quad \Rightarrow\quad \Delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12.$$

Так как $A>0$, $\Delta>0$, то функция имеет минимум, причем $S_{\text{мин}}=6\sqrt[3]{V^2}$.

Метод множителей Лагранжа

Этот метод применяется, когда из уравнений связи трудно или невозможно выразить одни переменные через другие. Изложим алгоритм этого метода.

Для отыскания условного экстремума функции $f(x,y,z)$ при наличии связей $F(x,y,z,)=0$, $G(x,y,z,)=0$ нужно:

1) составить вспомогательную функцию Лагранжа Φ следующим образом:

$$\Phi = f(x,y,z)+\lambda\cdot F(x,y,z)+\mu\cdot G(x,y,z);$$

2) найти ее критические точки из системы уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\ F(x,y,z,)=0,\ G(x,y,z,)=0;$$

3) исследовать критические точки на экстремум, исходя из геометрических или физических соображений или знака $d^2\Phi$.

Пример 1.40. В полушар радиусом R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Решение. Пусть точка $M(x,y,z)$ принадлежит полусфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\ge 0)$. Тогда высота вписанного в полушар параллелепипеда равна аппликате z, стороны основания равны $2x$, $2y$, объем $V=4xyz$. Требуется найти максимум функции $V(x,y,z)=4xyz$ при условии, что $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\ge 0)$. Составим функцию Лагранжа: $\Phi(x,y,z,\lambda)=4xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)$. Найдем ее критические точки, решив систему

$$\begin{cases}\Phi_x' = 4yz+2\lambda x=0,\\ \Phi_y' = 4xz+2\lambda y=0,\\ \Phi_z' = 4xy+2\lambda z=0,\end{cases}\ \Rightarrow\ -\lambda=\frac{2yz}{x}=\frac{2xz}{y}=\frac{2xy}{z}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}y^2=x^2,\\ y^2=z^2,\end{matrix}\ \Rightarrow\ x=y=z.$$

Подставив в уравнение связи $x^2+y^2+z^2=R^2$, получим $3z^2=R^2$, $z=\frac{R}{\sqrt{3}}$. Точка $M\left(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума (т.к. $V_{\min}=0$ при $z=0$), при этом $V_{\max}=V\left(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4R^3}{3\sqrt{3}}$.

Пример 1.41. Найти оси эллипса $5x^2+8xy+5y^2=9$.

Решение. При замене (x,y) на $(-x,-y)$ уравнение эллипса не меняется, т.е. эллипс симметричен относительно начала координат и центром эллипса является точка $O(0,0)$. Чтобы найти оси эллипса $2a$ и $2b$, необходимо найти расстояние $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ от точки $M(x,y)$ эллипса до точки $O(0,0)$ и исследовать функцию $d(x,y)$ или, что удобнее, $d^2(x,y)$ на экстремум. Итак, решаем методом множителей Лагранжа задачу: исследовать на экстремум функцию $d^2(x,y)=x^2+y^2$ при условии $5x^2+8xy+5y^2=9$.

Составим функцию Лагранжа: $\Phi(x,y,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2}+\lambda\left(5x^2+8xy+5y^2-9\right)$, найдем ее критические точки, решив систему:

$$\begin{cases} \Phi_x' = 2x + \lambda(10x + 8y) = 0, \\ \Phi_y' = 2y + \lambda(8x + 10y) = 0, \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda\,(5x + 4y), \\ y = -\lambda\,(4x + 5y), \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9. \end{cases}$$

Поделив первое уравнение на второе, получим $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5x+4y}{4x+5y}$ или $4x^2 = 4y^2$, $y = \pm x$.

Рассмотрим первоначально случай $y = x$. Подставляя $y = x$ в уравнение связи $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$, получим $18x^2 = 9$, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Аналогично для случая $y = -x$: $5x^2 - 8x^2 + 5x^2 = 9$, $2x^2 = 9$, $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $y = \mp\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Вычислим значения функции $d(x, y)$ в полученных точках:

$$d\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad d\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \mp\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3.$$

Ясно, что $d = 1$ является малой полуосью эллипса, $d = 3$ - большой полуосью эллипса. Тогда оси эллипса соответственно равны 2 и 6.

Пример 1.42. Найти наибольшее и наименьшее расстояния от плоскости XOY до поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + yz = 1$.

Решение. Рассмотрим на заданной поверхности произвольную точку $M(x, y, z)$. Расстояние от этой точки до плоскости XOY равно $|z|$. Исследуем на экстремум не функцию $|z|$, а более простую функцию z, при условии, что точка $M(x, y, z)$ принадлежит заданной поверхности, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности. Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi = z + \lambda\left(x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + yz - 1\right).$$

Найдем ее критические точки, решив систему:

$$\begin{cases} \Phi_x' = 2\lambda(x + y) = 0, \\ \Phi_y' = \lambda(4y + 2x + z) = 0, \\ \Phi_z' = 1 + \lambda(2z + y) = 0, \\ x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + yz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ 2(x + y) + 2y + z = 0, \\ (x + y)^2 + y^2 + z^2 + yz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ z = -2y, \\ y^2 + 4y^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \mp\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ и наибольшее расстояние от плоскости XOY до заданной поверхности равно $|z| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Наименьшее расстояние до плоскости XOY равно нулю, например, для точки поверхности с координатами $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

Пример 1.43. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z) = x + 2y - z$, если $x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 6z = 3$, $x + 2y = 3$ $(x > 0)$.

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi = x + 2y - z + \lambda\left(x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 6z - 3\right) + \mu\,(x + 2y - 3).$$

Найдем ее критические точки, используя уравнения связи $x^3+2y^3+2z^3+6z=3,\ \ x+2y=3$ и, решив систему

$$\begin{cases} \Phi'_x = 1+3\lambda x^2+\mu=0, \\ \Phi'_y = 2+6\lambda y^2+2\mu=0, \\ \Phi'_z = -1+6\lambda\left(z^2+1\right)=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Сократив второе уравнение системы на 2 и вычитая из первого уравнения, получим

$$3\lambda\left(x^2-y^2\right)=0 \Rightarrow a)\ \lambda=0,\ \ b)\ y=\pm x.$$

При $\lambda=0$ не выполняется третье уравнение системы (2); при $y=-x$ из второго уравнения связи получим $x=-3$, что противоречит условию $x>0$. При $y=x$ из второго уравнения связи получим $x=y=1$, из первого уравнения связи $2z^3+6z=2z\left(z^2+1\right)=0 \Rightarrow z=0$ и из третьего уравнения системы (2) $\lambda=1/6$.

Исследуем знак $d^2\Phi$ при $x=y=1,\ z=0,\ \lambda=1/6$:

$$\begin{matrix} \Phi''_{xx}=6\lambda x=1, & \Phi''_{xy}=\Phi''_{yx}=0, & \Phi''_{xz}=\Phi''_{zx}=0, \\ \Phi''_{yz}=\Phi''_{zy}=0, & \Phi''_{yy}=12\lambda y=2, & \Phi''_{zz}=12\lambda z=0 \end{matrix} \Rightarrow d^2\Phi=(dx)^2+2(dy)^2>0.$$

Так как $d^2\Phi>0$, то функция $f(x,y,z)=x+2y-z$ имеет условный минимум при $x=y=1,\ z=0$, причем $f_{\min}=3$.

Примеры для самостоятельного решения

1). Исследовать на условный экстремум функцию $z=6-4x-3y$, если $x^2+y^2=1$.

2). На параболе $2x^2-4yx+2y^2-x-y=0$ найти точку, ближайшую к прямой $9x-7y+16=0$.

3). Найти параллелепипед данной площади поверхности S, имеющий наибольший объем V.

4) На плоскости $x+y-2z=0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от плоскостей $x+3z=6,\ y+3z=2$ была бы наименьшей.

5). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2y^2-8x$ в области $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 3$.

Ответы: 1) $z_{\min}=z(4/5,3/5)=1,\ \ z_{\max}=z(-4/5,-3/5)=11$, 2) (3,5), 3) куб,

4) $M(3,-1,1)$, 5) $z_{\text{наиб}}=z(0,0)=0,\ z_{\text{наим}}=z(0,3)=-18$

2. Интегралы по фигуре

2.1. Определение, свойства

Определение интеграла по фигуре

Если существует при $d\to 0$ предел интегральной суммы функции $f(P)$ по фигуре (Φ), не зависящий от способа разбиения фигуры и выбора точек P_k, то этот предел называют ***интегралом функции*** $f(P)$ ***по фигуре*** (Φ):

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\Phi_k.$$

В частности, если фигура (Φ) является отрезком $[a,b]$, то интеграл называют ***определенным интегралом*** и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$:

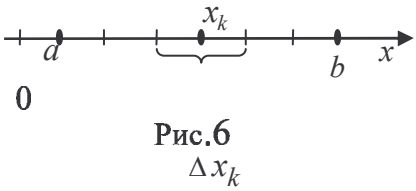

Рис.6

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k}$$

Здесь x_k – координаты выбранных точек P_k, Δx_k – меры ячеек разбиения, т.е. длины частичных отрезков (рис. 6), d – максимальная из длин Δx_k $(k=1,2,...,n)$.

Пример 2.1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+...+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение, вынося из каждого знаменателя n^2:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+...+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+...+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Здесь $\dfrac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ есть значения функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ в точках $x_k=\dfrac{k}{n}$ $(k=1,\,2,...,n)$, $\Delta x_1=\Delta x_2=...=\Delta x_n=\dfrac{1}{n}$, то есть мы имеем предел интегральной суммы функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ по отрезку $[0;1]$. Этот предел равен интегралу $\int\limits_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

Свойства интеграла по фигуре

1. Свойство линейности

$$\boxed{\int\limits_{(\Phi)}\big(\lambda\cdot f(P)+\mu\cdot g(P)\big)\,d\Phi=\lambda\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi+\mu\int\limits_{(\Phi)} g(P)\,d\Phi},$$

где λ и μ – константы.

2. Свойство аддитивности

Пусть фигура (Φ) разбита (рис. 7) на части (Φ_1) и (Φ_2). Тогда

$$\boxed{\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi=\int\limits_{(\Phi_1)} f(P)\,d\Phi+\int\limits_{(\Phi_2)} f(P)\,d\Phi}.$$

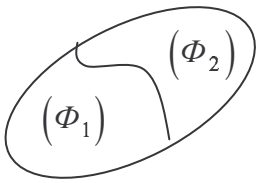

Рис.7

3. О вычислении меры фигуры

Мера Φ фигуры (Φ) вычисляется по формуле $\Phi=\int\limits_{(\Phi)} d\Phi$.

В частности, мы имеем формулы для отыскания длины l дуги (l), площади S плоской области (S), площади σ поверхности (σ), объёма V тела (V):

$$\boxed{l=\int\limits_{(l)} dl,\qquad S=\int\limits_{(S)} dS,\qquad \sigma=\int\limits_{(\sigma)} d\sigma,\qquad V=\int\limits_{(V)} dV.}$$

4. Об интегрировании неравенств

Если $f(P) \le g(P)$ на фигуре (Φ), то $\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} g(P)\,d\Phi$.

5. Об оценке интеграла

$$m \cdot \Phi \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi \le M \cdot \Phi,$$

где m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ на фигуре (Φ).

6. Об оценке модуля интеграла

$$\left| \int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi \right| \le \int\limits_{(\Phi)} |f(P)|\,d\Phi.$$

7. Теорема о среднем

Пусть функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ). Тогда на (Φ) существует точка $\tilde{P}$ такая, что

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi = f\left(\tilde{P}\right) \cdot \Phi \quad \text{или} \quad f\left(\tilde{P}\right) = \frac{1}{\Phi} \int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi.$$

Значение $f\left(\tilde{P}\right)$ из теоремы о среднем называют средним значением функции $f(P)$ на фигуре (Φ) и обозначают $f_{\text{ср}}$. Оно используется в прикладных задачах.

Пример 2.2. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}$.

Решение. По свойству 5) имеем: $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$, где m — наименьшее, M — наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Найдем m и M для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}$ на отрезке $[-1;\,1]$. Для этого

1) вычислим производную $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x - 3x^2}{\sqrt{\left(4 - x^2 - x^3\right)^3}}$;

2) найдем критические точки, решив уравнение $f'(x) = 0$; $\frac{2x + 3x^2}{2\sqrt{(4 - x^2 - x^3)^3}} = 0$;

$2x + 3x^2 = 0$; $x(2 + 3x) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2/3$; знаменатель $\left(4 - x^2 - x^3\right)$ на отрезке $[-1;\,1]$ в нуль не обращается; поэтому других критических точек нет;

3) вычислим значения функции $f(x)$ в критических точках и на концах отрезка:

$$f(0) = \frac{1}{2}; \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{4 - 4/9 + 8/27}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{26}} \approx 0{,}509; \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}709; \quad f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Из множества полученных значений наименьшее значение $m=\frac{1}{2}=0{,}5$ и наибольшее значение $M=0{,}709$. Поэтому

$$0{,}5\cdot 2\le\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\le 0{,}709\cdot 2 \quad \text{или} \quad 1\le\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\le 1{,}42.$$

Пример 2.3. Оценить интеграл $\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$, где (D)– квадрат $\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 1.\end{cases}$

Решение. В квадрате (D) оценим подынтегральную функцию:

$$0\le x^2+y^2\le 2 \quad\Rightarrow\quad -2\le -x^2-y^2\le 0 \quad\Rightarrow\quad e^{-2}\le e^{-x^2-y^2}\le e^0.$$

Поэтому по свойству 5) имеем:

$$e^{-2}\cdot S\le\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2}dx\,dy\le e^0\cdot S.$$

Здесь S есть площадь квадрата (D), $S=1$. Окончательно получим:

$$e^{-2}\le\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2}dx\,dy\le 1.$$

Пример 2.4. Пользуясь неравенствами $x-\frac{x^3}{3!}\le\sin x\le x\ \ (x\ge 0)$, доказать, что

$$\frac{13}{21}\le\int\limits_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\le\frac{14}{21}.$$

Решение. Функция $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ не определена в точке $x=0$. Доопределим эту функцию, положив:

$$f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=0.$$

Тогда функция будет непрерывна на отрезке $[0;1]$ и значит интегрируема. Для оценки интеграла воспользуемся неравенствами $x-\frac{x^3}{3!}\le\sin x\le x\ \ (x\ge 0)$. Поделив эти неравенства на $\sqrt{x}$, получим $x^{1/2}-\frac{x^{5/2}}{6}\le\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\le x^{1/2}\ \ (x\ge 0)$. По свойству об интегрировании неравенств:

$$\int\limits_0^1\left(x^{1/2}-\frac{x^{5/2}}{6}\right)dx\le\int\limits_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\le\int\limits_0^1 x^{1/2}\,dx.$$

Вычислим интегралы:

$$\int\limits_0^1 x^{1/2}dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}=\frac{14}{21},\qquad \int\limits_0^1\left(x^{1/2}-\frac{x^{5/2}}{6}\right)dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}x^{7/2}\cdot\frac{2}{7}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{21}=\frac{13}{21}.$$

Тогда $\frac{13}{21}\le\int\limits_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\le\frac{14}{21}$, что и требовалось доказать.

Механические приложения интеграла по фигуре

1. Вычисление массы фигуры

Пусть известна плотность распределения масс $\gamma(P)$. Тогда масса фигуры (Φ)

$$\boxed{m = \int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)\, d\Phi.}$$

2. Отыскание центра тяжести фигуры

$$\boxed{x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{(\Phi)} x\cdot\gamma(P)\, d\Phi, \quad y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{(\Phi)} y\cdot\gamma(P)\, d\Phi, \quad z_c = \frac{1}{m}\int\limits_{(\Phi)} z\cdot\gamma(P)\, d\Phi.}$$

3. Вычисление моментов инерции фигуры

$$\boxed{I_{XOY} = \int\limits_{(\Phi)} z^2\cdot\gamma(P)\, d\Phi, \quad I_{XOZ} = \int\limits_{(\Phi)} y^2\cdot\gamma(P)\, d\Phi, \quad I_{YOZ} = \int\limits_{(\Phi)} x^2\cdot\gamma(P)\, d\Phi;}$$

$$\boxed{I_{OX} = \int\limits_{(\Phi)} (y^2+z^2)\cdot\gamma(P)\, d\Phi, \quad I_{OY} = \int\limits_{(\Phi)} (x^2+z^2)\cdot\gamma(P)\, d\Phi, \quad I_{OZ} = \int\limits_{(\Phi)} (x^2+y^2)\cdot\gamma(P)\, d\Phi;}$$

$$\boxed{I_0 = \int\limits_{(\Phi)} (x^2+y^2+z^2)\cdot\gamma(P)\, d\Phi.}$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Оценить интегралы $I_1 = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx, \quad I_2 = \int\limits_2^5 \frac{dx}{\ln x}$.

2). Найти среднее значение функции

а) $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1;\, 4]$; б) $f(x) = 3^x - 2x + 3$ на отрезке $[0;2]$.

3). Выяснить, какой из интегралов больше:

а) $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x\, dx$ или $I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$; б) $I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x} dx$ или $I_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.

Ответы: 1) $0 \le I_1 \le \sqrt{2}$, $\frac{3}{\ln 5} \le I_2 \le \frac{3}{\ln 2}$; 2а) $\frac{1}{3}\ln 4$, 2б) $\frac{8}{\ln 3} + 2$; 3а) I_2, 3б) I_2.

2.2. Определенный интеграл

При введении определенного интеграла мы предполагали, что $a < b$. При $a > b$ полагают $\int\limits_a^b f(x)\, dx = -\int\limits_b^a f(x)\, dx$. При $a = b$ полагают $\int\limits_a^a f(x)\, dx = 0$.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)\, dt$. Каждому x из отрезка $[a, b]$ соответствует определенное число – значение этого интеграла, то есть интеграл является функцией

$$\int\limits_a^x f(t)\, dt = \Phi(x), \quad x \in [a, b].$$

Если подынтегральная функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе, то есть

$$\boxed{\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x)}. \qquad (2.1)$$

Отсюда и из правила дифференцирования сложной функции следует:

$$\boxed{\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)'_x=f\left(u(x)\right)\cdot u'_x,\quad \left(\int_{u(x)}^{a} f(t)\,dt\right)'_x=\left(-\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)'_x=-f\left(u(x)\right)\cdot u'_x.} \qquad (2.2)$$

Пример 2.5. Вычислить y'_x, если 1) $y(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$; 2) функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями $y(t)=\int_5^{\ln t} e^z dz,\ \ x(t)=\int_2^t \frac{\ln z}{z}dz$.

Решение. 1). Запишем заданный интеграл в следующем виде:

$$y(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\int_{x^2}^{a}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\int_a^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Используя формулы (2.2), получим:

$$y'_x=-\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\Bigg|_{t=x^2}\cdot\left(x^2\right)'+\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\Bigg|_{t=x^3}\cdot\left(x^3\right)'=-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}+\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}.$$

2). Для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x(t)=\int_2^t\frac{\ln z}{z}dz$, $y(t)=\int_5^{\ln t}e^z dz$, вычислим y'_t, x'_t и y'_x:

$$y'_t=\left(\int_5^{\ln t}e^z dz\right)'_t=e^{\ln t}(\ln t)'=t\cdot\frac{1}{t}=1,\quad x'_t=\left(\int_2^t\frac{\ln z}{z}dz\right)'_t=\frac{\ln t}{t},\quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{(\ln t)/t}=\frac{t}{\ln t}.$$

Формула Ньютона-Лейбница

Основная формула для вычисления определенного интеграла — формула Ньютона-Лейбница

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),\ \text{где } F(x)\text{–первообразная для } f(x) \text{ на } [a,b].}$$

Пример 2.6. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{1}{\sin^4 x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. По теореме о среднем имеем:

$$f_{cp}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Вычислим интеграл и среднее значение функции:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^4 x}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{\sin^4 x}dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{ctg}^2 x\,d(\operatorname{ctg}x)-\operatorname{ctg}x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}-(0-1)=\frac{4}{3},\qquad f_{cp}=\frac{1}{\pi/2-\pi/4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{3\pi}.$$

Пример 2.7. Вычислить интегралы $I_1=\int_0^3\frac{(3x-1)\,dx}{x^2+9}$, $I_2=\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

Решение. 1). Используя свойства интеграла и формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$I_1=\int_0^3\frac{(3x-1)\,dx}{x^2+9}=3\int_0^3\frac{x\,dx}{x^2+9}-\int_0^3\frac{dx}{x^2+9}=3\int_0^3\frac{\frac{1}{2}d\left(x^2+9\right)}{x^2+9}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_0^3=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+9)\Big|_0^3-\frac{1}{3}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\frac{3}{2}(\ln 18-\ln 9)-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{\pi}{12}.$$

2). В интеграле I_2 умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{e^x}$. Тогда

$$I_2=\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}=\int_0^1\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\int_0^1\frac{de^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2+1}}=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(e+\sqrt{e^2+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}.$$

При вычислении определенного интеграла следует учитывать следующие полезные свойства:

если функция $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-a,a]$, то $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$;

если функция $f(x)$ – четная на $[-a,a]$, то $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$;

если функция $f(x)$ имеет период T, то $\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$.

Пример 2.8. Вычислить интегралы $I_1=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{2x-\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $I_2=\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$,

$I_3=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$, $I_4=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-5x^5-3x^3+8\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$.

Решение. 1). В интеграле $I_1=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{2x-\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ подынтегральная функция является нечетной на отрезке $[-1/2;1/2]$ (т.к. $f(-x)=-f(x)$), поэтому $I_1=0$.

2). В интеграле I_2 подынтегральная функция $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}\ge 0$ является периодической с периодом $T=\pi$. Поэтому $\int_a^{a+\pi}f(x)\,dx=\int_0^{\pi}f(x)\,dx$ и

$$I_2=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx+\ldots+\int_{99\pi}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx+\ldots+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx.$$

Учитывая, что $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2\sin^2 x}=\sqrt{2}\,|\sin x|$ и $|\sin x|=\sin x$ на $[0;\pi]$, получим:

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,dx=\sqrt{2}\,(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\sqrt{2}\,(1+1)=2\sqrt{2}.$$

Итак, $I_2=\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=200\sqrt{2}$.

3). В интеграле I_3 подынтегральная функция $f(x)=\sqrt{\cos x-\cos^3 x}$ является четной, поэтому $I_3=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$. Учитывая, что

$$f(x)=\sqrt{\cos x-\cos^3 x}=\sqrt{\cos x\left(1-\cos^2 x\right)}=\sqrt{\cos x\cdot\sin^2 x}=\sqrt{\cos x}\cdot|\sin x| \text{ и}$$

$|\sin x|=\sin x$ на промежутке $[0;\,\pi/2]$, получим:

$$I_3=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\cdot\sin x\,dx=-2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\,d(\cos x)=-2\frac{\cos^{3/2}x}{3/2}\Bigg|_0^{\pi/2}=-\frac{4}{3}(0-1)=\frac{4}{3}.$$

4). В интеграле I_4 подынтегральную функцию представим в виде

$$f(x)=\frac{x^7-5x^5-3x^3+8\,\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{x^7-5x^5-3x^3}{\cos^2 x}+\frac{8\,\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}.$$

Функция $\dfrac{x^7-5x^5-3x^3}{\cos^2 x}$ является нечетной на отрезке $[-\pi/4;\,\pi/4]$ и потому

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-5x^5-3x^3}{\cos^2 x}\,dx=0.$$

Функция $\dfrac{8\,\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}$ является четной на отрезке $[-\pi/4;\,\pi/4]$, поэтому

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{8\,\mathrm{tg}^2 x\,dx}{\cos^2 x}=2\cdot 8\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{tg}^2 x\,dx}{\cos^2 x}=16\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^2 x\;d(\mathrm{tg}\,x)=16\,\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{16}{3};\qquad I_4=\frac{16}{3}.$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du}.$$

Рекомендации по применению этой формулы такие же, как для неопределенного интеграла.

Пример 2.9. Вычислить интегралы: $I_1=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}$, $I_2=\int_1^2 x^3e^{x^2}dx$.

Решение. Интегралы I_1, I_2 вычислим методом интегрирования по частям.

1). Для вычисления интеграла $I_1 = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$ положим $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$. Тогда $du = dx$, $v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$. По формуле интегрирования по частям имеем:

$$I_1 = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = x\cdot(-\operatorname{ctg} x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{\pi}{4} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{4} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln|\sin x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

2). При вычислении интеграла $I_2 = \int\limits_1^2 x^3 e^{x^2} dx$ положим $u = x^2$, $dv = x\,e^{x^2}$. Тогда

$$du = dx^2, \quad v = \int x\,e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{1}{2}e^{x^2} dx^2 = 2e^4 - \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_1^2 == 2e^4 - \frac{e}{2} - \frac{e^4}{2} + \frac{e}{2} = \frac{3e^4}{2}.$$

Заметим, что если положить $u = x^3$, $dv = e^{x^2} dx$, то мы не сможем найти v, так как интеграл $\int e^{x^2} dx$ – «неберущийся».

Метод замены переменной

При замене переменной в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует:

1) заменить переменную x на удачно подобранную функцию $\varphi(t)$;
2) заменить dx на $d\varphi(t) = \varphi'(t)\,d\,t$;
3) заменить отрезок $[a,b]$ изменения переменной x на отрезок $[\alpha,\beta]$ изменения переменной t, найдя α и β из условий $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
4) вычислить получившийся определенный интеграл.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Отметим, что при вычислении определенного интеграла по этой формуле не надо возвращаться к первоначальной переменной, как это приходилось делать при замене переменной в неопределенном интеграле. Рекомендации по выбору новой переменной такие же, как и для неопределенного интеграла.

Пример 2.10. Вычислить интегралы: $I_1 = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$; $I_2 = \int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

Решение. 1). Для вычисления интеграла I_1 сделаем замену переменной $x = \operatorname{tg} t$, найдем $dx = \frac{d\,t}{\cos^2 t}$ и новые пределы интегрирования (пределы изменения t):

$x=1 \Rightarrow t=\operatorname{arctg}1=\pi/4$; $x=\sqrt{3} \Rightarrow t=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi/3$. Получим:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\frac{1}{\cos t}dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\cos^2 t}=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t\cdot\sin^2 t}=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\cdot\sin^2 t}dt=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t}+\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\ln\left(\frac{1}{\cos t}+\operatorname{tg}t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3}+\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sin t}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}.$$

2). Для вычисления интеграла $I_2=\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$ сделаем замену переменной $t=\sqrt{3x+1}$ или $x=\left(t^2-1\right)/3$, найдем $dx=(2t\,dt)/3$ и новые пределы интегрирования (пределы изменения переменной t): $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=5 \Rightarrow t=4$. Получим

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}=\int_1^4 \frac{2t\,dt}{3\left(2\left(t^2-1\right)/3+t\right)}=\int_1^4 \frac{2t\,dt}{2t^2+3t-2}=\int_1^4 \frac{(4t+3)/2-3/2}{2t^2+3t-2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{d\left(2t^2+3t-2\right)}{2t^2+3t-2}-\frac{3}{4}\int_1^4 \frac{dt}{t^2+3t/2-1}=\frac{1}{2}\ln\left(2t^2+3t-2\right)\Big|_1^4-\frac{3}{2\cdot 2}\int_1^4 \frac{dt}{(t+3/4)^2-25/16}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{42}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot 5/4}\ln\left|\frac{t+3/4-5/4}{t+3/4+5/4}\right|\Bigg|_1^4=\frac{1}{2}\ln 14-\frac{3}{10}\ln\frac{7}{2}=\frac{1}{5}\ln 112.$$

Примеры для самостоятельного решения

1). Найти производную y'_x для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x=\int_1^{t^2} z\ln z\,dz$, $y=\int_{t^2}^1 z^2\ln z\,dz$.

2). Найти точки экстремума функции $f(x)=\int_1^{x^2} e^{\frac{-t^2}{2}}\left(1-t^2\right)dt$.

3). Вычислить интегралы: $I_1=\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$; $I_2=\int_1^3 \ln x\,dx$; $I_3=\int_0^{\pi} x^3\sin x\,dx$; $I_4=\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

$$I_5=\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx;\ I_6=\int_{2\sqrt{2}}^4 \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^2}dx.$$

4). Доказать равенства:

а) $\int_{-\pi/8}^{\pi/8} x^{10}\sin^9 x\,dx=0$; б) $\int_0^{2\pi} \cos^4 x\sin^3 x\,dx=0$; в) $\int_{-1}^1 \frac{x^7-3x^5+x^2+9x}{x^6+1}dx=2\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^6+1}=\frac{\pi}{6}$.

В примере 4б) использовать свойство: $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, если $f(x+2\pi)=f(x)$.

Ответы: 1) $-t^2$; 2) точки максимума $x=\pm 1$, точка минимума $x=0$;

3). $I_1=3/20$, $I_2=3\ln 3-2$, $I_3=\pi^3-6\pi$, $I_4=\frac{32}{3}$, $I_5=1-\frac{\pi}{4}$, $I_6=\frac{\sqrt{2}}{96}$.

2.3. Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем $y_2(x) \ge y_1(x)$ на $[a, b]$ (рис.8). Площадь S такой фигуры

$$\boxed{S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx.}$$

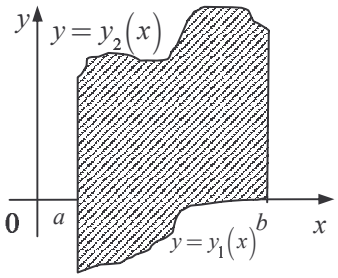

Рис.8

Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем $x_2(y) \ge x_1(y)$ на $[c, d]$ (рис.9). Площадь S такой фигуры

$$\boxed{S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]\,dy.}$$

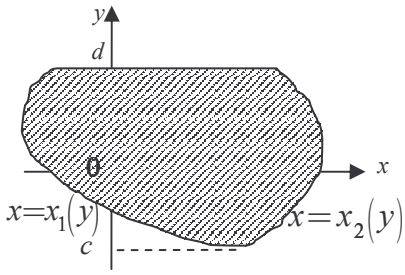

Рис.9

Пример 2.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 - 2x + 3$, осью ординат и касательной к параболе в точке $M(2,-5)$.

Решение. Построим заданные линии (рис. 10). Уравнение $y = -x^2 - 2x + 3$ или $y = -(x+1)^2 + 4$ определяет параболу с вершиной в точке $A(-1;4)$ и осью симметрии, параллельной оси OY (прямая $x = -1$). Составим уравнение касательной к параболе в точке $M(2,-5)$. Угловой коэффициент касательной $k = y'(2) = (-2x-2)\big|_{x=2} = -6$. Уравнение касательной: $y + 5 = -6(x-2)$ или $y = -6x + 7$. Построим прямую по точкам $M(2;-5)$ и $C(0;7)$. В примере нужно вычислить площадь фигуры MBC. Снизу фигура ограничена параболой $y_1 = -x^2 - 2x + 3$, сверху прямой $y_2 = -6x + 7$, значения переменной x принадлежат отрезку $[0;2]$. Для вычисления площади воспользуемся формулой $S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx$. Получим:

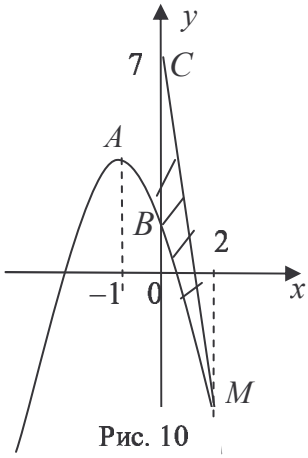

Рис. 10

$$S = \int_0^2 (-6x + 7 + x^2 + 2x - 3)\,dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx = \int_0^2 (x-2)^2\,dx = \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Пример 2.12. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ и осью абсцисс.

Решение. Построим заданные линии и заштрихуем фигуру, площадь которой нужно вычислить (рис. 11). Найдем координаты точки пересечения линий из уравнения $\arcsin x = \arccos x$. Получим $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\pi}{4}$. Площадь S фигуры есть сумма площадей двух фигур:

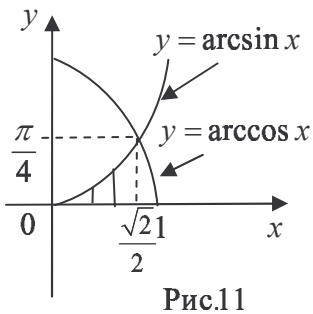

Рис.11

$$S = S_1 + S_2 \text{ , где } S_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x\,dx, \quad S_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \arccos x\,dx.$$

Площадь S этой же фигуры можно рассматривать как разность площадей S_3 и S_4 двух криволинейных трапеций с основаниями на оси OY, где

$$S_3 = \int_c^d x(y)\,dy = \int_0^{\pi/4} \cos y\,dy = \sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad S_4 = \int_0^{\pi/4} \sin y\,dy = -\cos y\Big|_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Площадь фигуры $S = S_3 - S_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$. Очевидно, что вычислений при решении задачи вторым методом значительно меньше, чем при решении первым.

Пример 2.13. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей линии: $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

Решение. Для построения линии составим таблицу

t	0	$\pm 1/2$	± 1	± 2
x	-1	$-3/4$	0	3
y	0	$\mp 3/8$	0	± 6

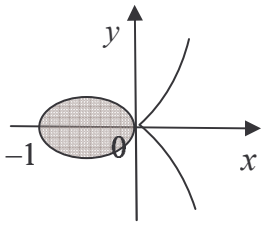

Рис.12

Построим точки с вычисленными координатами (x, y), соединим их линией (рис. 12). Вычислим площадь S_0 фигуры, ограниченной верхней половиной петли линии по формуле $S_0 = \int_{-1}^{0} y\,dx$, учитывая, что $y = t^3 - t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$, $t = 0$ при $x = -1$, $t = -1$ при $x = 0$:

$$S_0 = \int_{-1}^{0} y\,dx = \int_0^{-1} \left(t^3 - t\right) 2t\,dt = 2\int_0^{-1} \left(t^4 - t^2\right) dt = \frac{4}{15}.$$

Тогда площадь S всей фигуры равна: $S = 2S_0 = \frac{8}{15}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y = \frac{x^2}{3}$, $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$; б) $y = 2x - x^2$, $y = -x$. *Ответ:* а) $\frac{32}{3}$, б) $\frac{9}{2}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью OY. *Ответ:* 12.

Объем тела вращения

Объем V_{OX} тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y = y(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{V_{OX} = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx, \quad \text{или} \quad V_{OX} = \pi\int_a^b y^2 dx}.$$

Аналогично вычисляется объем V_{OY} тела, полученного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линией $x = x(y)$, осью OY, прямыми $y = c,\ y = d$:

$$V_{OY} = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy\,, \quad \text{или} \quad V_{OY} = \pi\int_c^d x^2 dy\,.$$

Пример 2.14. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^2$, $x = 0,\ x = 2,\ y = 0$, вокруг оси OX.

Решение. Построим линии, ограничивающие фигуру (рис. 13). Это — парабола $y = (x-1)^2$ с вершиной в точке (1;0) и осью симметрии, параллельной оси OY, прямые $x = 0$ (ось OY), $y = 0$ (ось OX), прямая $x = 2$, параллельная оси OY. Объем тела, полученного при вращении фигуры вокруг оси OX, вычислим по формуле

$$V_{OX} = \pi\int_0^2 y^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 (x-1)^4\,dx = \pi\frac{(x-1)^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{2\pi}{5}\,.$$

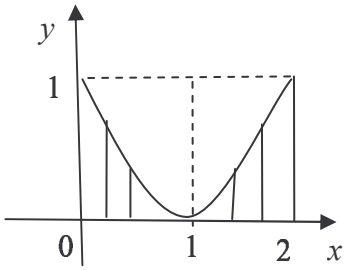

Рис.13

Пример 2.15. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 + 2$, $x = 1,\ y = 1$.

Решение. Построим линии, ограничивающие фигуру (рис.14). Для вычисления объема тела вращения непосредственно воспользоваться формулой нельзя, т.к. снизу фигура ограничена не осью OX, а прямой $y = 1$. Объем тела вращения будет равен разности объемов V_1 и V_2: $V_{ox} = V_1 - V_2$, где V_1 есть объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 + 2,\ x = 1,\ x = -1,\ y = 0$, V_2 – объем цилиндра радиусом $r = 1$ и высотой $h = 2$. Вычислим V_1 и V_2:

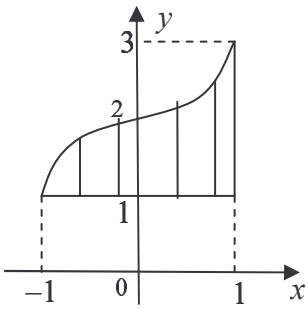

Рис.14

$$V_1 = \pi\int_{-1}^{1}(x^3+2)^2\,dx = \pi\int_{-1}^{1}\left(x^6+4+4x^3\right)dx = 2\pi\int_0^1 (x^6+4)\,dx = \frac{58\pi}{7},\quad V_2 = \pi r^2 h = 2\pi.$$

При вычислении V_1 мы воспользовались тем, что $\int_{-1}^{1}(x^6+4)\,dx = 2\int_0^1 (x^6+4)\,dx$ как интеграл от четной функции, $\int_{-1}^{1} 4x^3 dx = 0$ как интеграл от нечетной функции. Тогда $V_{OX} = V_1 - V_2 = \frac{58\pi}{7} - 2\pi = \frac{44\pi}{7}$.

Пример 2.16. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = 0,\ x = 2$ и кривой $y = e^x$ (рис.15).

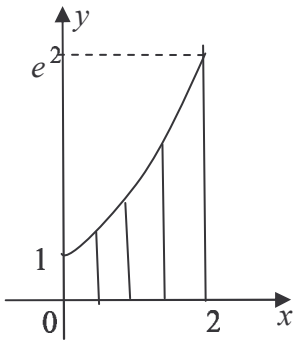

Рис.15

Решение. Объем тела вращения $V_{oy} = V_1 - V_2$, где V_1 – объем цилиндра радиусом $r = 2$ и высотой $h = e^2$, $V_1 = \pi r^2 h = 4\pi e^2$, V_2 –

объем тела, полученного при вращении вокруг оси OY криволинейного треугольника, ограниченного линией $y=e^x$, прямыми $x=0,\ y=e^2$. Объем V_2 вычислим по формуле $V_{oy}=\pi\int\limits_c^d x^2(y)\,dy$. Из уравнения $y=e^x$ найдем $x=\ln y$. Тогда

$$V_2=\pi\int\limits_1^{e^2}\ln^2 y\,dy=\left|\begin{matrix}u=\ln^2 y, & du=2\ln y\dfrac{dy}{y}\\ dv=dy, & v=y\end{matrix}\right|=\pi\left(y\ln^2 y\Big|_1^{e^2}-2\int\limits_1^{e^2}\ln y\,dy\right)=\left|\begin{matrix}u=\ln y, & du=\dfrac{dy}{y}\\ dv=dy, & v=y\end{matrix}\right|=$$

$$=\pi\left(4e^2-2\left(y\ln y\Big|_1^{e^2}-\int\limits_1^{e^2}y\,\frac{dy}{y}\right)\right)=\pi\left(4e^2-2\left(2e^2-y\Big|_1^{e^2}\right)\right)=\pi\left(4e^2-4e^2+2e^2-2\right)=\pi(2e^2-2).$$

Объем тела вращения первоначальной криволинейной трапеции вокруг оси OY:

$$V_{oy}=V_1-V_2=4\pi e^2-\pi\left(2e^2-2\right)=2\pi\left(e^2+1\right).$$

Пример 2.17. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной петлей линии: $x=t^2-1,\ \ y=t^3-t$ (рис.12).

Решение. Вычислим искомый объем по формуле $V_{OX}=\pi\int_{-1}^{0}y^2\,dx$, учитывая, что $y=t^3-t,\ \ x=t^2-1,\ \ dx=2t\,dt,\ \ t=0$ при $x=-1,\ \ t=-1$ при $x=0$:

$$V_{OX}=\pi\int\limits_{-1}^{0}y^2\,dx=\pi\int\limits_0^{-1}\left(t^3-t\right)^2 2t\,dt=2\pi\int\limits_0^{-1}\left(t^7-2t^5+t^3\right)dt=\frac{\pi}{12}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Фигура, ограниченная эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, вращается а) вокруг оси OX, б) вокруг оси OY. Найти объемы получающихся эллипсоидов вращения.

Ответ: а) $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$; б) $\dfrac{4}{3}\pi a^2b$.

2. Фигура, ограниченная линией $x=\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t$, лежащей в первой четверти, и координатными осями, вращается вокруг оси OX. Вычислить объем получающегося тела вращения. *Ответ:* 0.3π.

3. Фигура, ограниченная дугами парабол $y=x^2$ и $y^2=x$, вращается вокруг оси OX. Вычислить объем тела вращения. *Ответ:* $16\pi/105$.

2.4. Криволинейный интеграл I рода

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ \ y=y(t)$, $z=z(t)$, где $t\in[\alpha,\beta]$, $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\boxed{\int\limits_{(AB)}f(x,y,z)\,dl=\int\limits_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt.}$$

Если плоская кривая (L) задана уравнением $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, то

$$\boxed{\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x,\ y(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx}.$$

Если плоская кривая (L) задана уравнением $x = x(y),\quad y \in [c,\ d]$, то

$$\boxed{\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl = \int\limits_c^d f\left(x(y),\ y\right)\cdot\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy}.$$

Пример 2.18. Найти момент инерции относительно OY участка однородной линии $y = \ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(2, \ln 2)$.

Решение. Линия (L) задана уравнением $y = \ln x,\quad x \in [1,\ 2]$, поэтому

$$dl = \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx,$$

$$I_{OY} = \int\limits_{(L)} x^2\,dl = \int\limits_1^2 x^2\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int\limits_1^2 x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{x^2+1}\,d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{5^{3/2}-2^{3/2}}{3}.$$

Пример 2.19. Вычислить массу дуги кривой $x = \frac{2}{3}y^{3/2},\ y \in [0,\ 3]$, если плотность $\gamma = 1 + y$.

Решение. Кривая задана уравнением $x = x(y)$, поэтому

$$dl = \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy = \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}\,dy = \sqrt{1+y}\,dy.$$

Массу дуги кривой вычислим по формуле

$$m = \int\limits_{(L)} \gamma\,dl = \int\limits_0^3 (1+y)\sqrt{1+y}\,dy = \int\limits_0^3 (1+y)^{3/2}\,dy = \frac{2}{5}\,(1+y)^{5/2}\Big|_0^3 = \frac{62}{5}.$$

Пример 2.20. Вычислить длину дуги линии $x = \int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz,\ y = \int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz$ от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

Решение. Для кривой, заданной параметрическими уравнениями,

$$L = \int\limits_{(L)} dl = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt.$$

Вычислим: $x'_t = \left(\int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz\right)'_t = \frac{\cos t}{t},\quad y'_t = \left(\int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz\right)'_t = \frac{\sin t}{t},\quad \sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'\right)_t^2} = \frac{1}{t}.$

Найдем значения параметра, соответствующие началу координат и точке с ближайшей к нему вертикальной касательной. В начале координат $x = \int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz = 0$, $y = \int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz = 0$, что возможно при $t_0 = 1$. Угловой коэффициент касательной $k = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t\cdot\sin t}{t\cdot\cos t} = \operatorname{tg} t$. Для вертикальной касательной $k = \infty$ при $t_1 = \frac{\pi}{2}$. Тогда $L = \int_1^{\pi/2} \frac{dt}{t} = \ln t\,\Big|_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2}$.

Пример 2.21. Найти момент инерции относительно начала координат однородной линии (L): $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ y=x. \end{cases}$

Решение. Момент инерции относительно начала координат найдем по формуле

$$I_0=\int_{(L)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma dl.$$

Линия *(L)* есть линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и плоскости $y=x$. Подставив в уравнение сферы x вместо y, получим уравнение линии *(L)* в виде:

$$\begin{cases} 2x^2+z^2=R^2, \\ y=x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \left(\sqrt{2}x\right)^2+z^2=R^2, \\ y=x. \end{cases}$$

Запишем уравнение линии в виде $\sqrt{2}x=R\cos t,\quad z=R\sin t,\quad y=x$ или

$$x=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t,\quad y=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t,\quad z=R\sin t,\quad t\in[0,\,2\pi].$$

Тогда $dl=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}\,dt=\sqrt{\frac{R^2}{2}\sin^2 t+\frac{R^2}{2}\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\;dt=R\,dt$.

Итак, $I_0=\int\limits_0^{2\pi}R^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\cdot\gamma R\,dt=R^3\gamma\cdot t\Big|_0^{2\pi}=2\pi\gamma R^3$.

2.5. Двойной интеграл в прямоугольной системе координат

Пусть область (D) в плоскости XOY ограничена линиями $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$ ($\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ на $[a,b]$). Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Чтобы вычислить данный интеграл, необходимо:

1) построить область интегрирования;
2) записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения y. Двигаясь параллельно оси OY, мы войдем в фигуру через линию, на которой $y=\varphi_1(x)$, а выйдем через линию, на которой $y=\varphi_2(x)$, т.е. переменная интегрирования y меняется от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$;
3) проецируя область (D) на ось OX, расставить <u>внешние</u> пределы интегрирования (это всегда – <u>числа</u>, а не функции);
4) вычислить сначала внутренний интеграл при постоянном x, затем – внешний интеграл.

Пусть область (D) в плоскости XOY ограничена линиями $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, $y=c$, $y=d$ ($g_1(y)\le g_2(y)$ на $[c,d]$). Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Пример 2.22. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в интеграле $I=\iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$, если область интегрирования – круговой сектор OAB, где $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

Решение. Запишем уравнения линий, ограничивающих область (D). Прямая (OA) имеет уравнение $y=x$, прямая (OB) – уравнение $y=-x$, дуга AB – часть окружности с уравнением $x^2+y^2=2$.

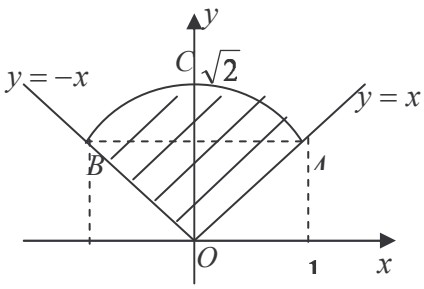

Рис.16

1). Из уравнения окружности выразим y: $y=\sqrt{2-x^2}$, так как $y\ge 0$. При переходе от двойного интеграла к повторному сначала расставляют внутренние пределы интегрирования, а затем – внешние. Так как снизу область (D) ограничена двумя линиями (рис. 16), то при расстановке пределов интегрирования придется разбить данный интеграл на два интеграла, пользуясь свойством аддитивности:

$$\iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\iint_{(BOC)} f(x,y)\,dxdy+\iint_{(AOC)} f(x,y)\,dxdy.$$

Область (BOC) снизу ограничена линией $y=-x$, сверху – линией $y=\sqrt{2-x^2}$, $-1\le x\le 0$.

Область (AOC) снизу ограничена линией $y=x$, сверху – линией $y=\sqrt{2-x^2}$, $0\le x\le 1$.

Таким образом, $I=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

2). Запишем теперь повторный интеграл, сменив порядок интегрирования. Слева область (D) ограничена двумя линиями: отрезком OB $(x=-y)$ и дугой BC $\left(x=-\sqrt{2-y^2}\right)$. Справа область (D) также ограничена двумя линиями: отрезком OA $(x=y)$ и дугой AC $\left(x=\sqrt{2-y^2}\right)$. Поэтому разобьем интеграл на два интеграла.

По свойству аддитивности $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{(AOB)} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{(BAC)} f(x,y)\,dxdy$.

Область (AOB) слева ограничена линией $x=-y$, справа – линией $x=y$, причем $0\le y\le 1$. Область (BAC) слева ограничена линией $x=-\sqrt{2-y^2}$, справа – линией $x=\sqrt{2-y^2}$, причем $1\le y\le\sqrt{2}$.

Таким образом, снова получаем два повторных интеграла:

$$I=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-y}^{y} f(x,y)\,dx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Пример 2.23. Изменить порядок интегрирования в интегралах:

а) $\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$; б) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$.

Решение. а). Рассмотрим область интегрирования (D). Сверху она ограничена линией $y=\sqrt{x}$, снизу – линией $y=x/2$, где $x\in[0,4]$ (рис. 17).

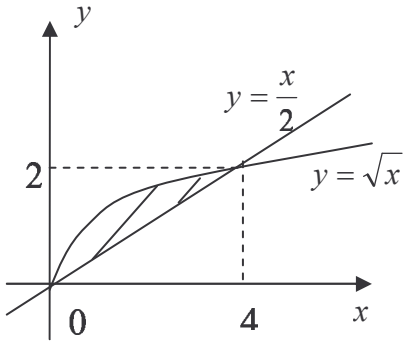

Рис.17

Изменим порядок интегрирования. Уравнения граничных линий разрешим относительно x. Слева область (D) ограничена линией $x=y^2$, справа – линией $x=2y$, где $y\in[0,2]$.

Тогда $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx$.

б). Построим область интегрирования (D). Она ограничена линиями $x=-\sqrt{1-y^2}$, $x=1-y$, $y=0$, $y=1$. Слева область (D) ограничена линией $x=-\sqrt{1-y^2}$. Преобразуем это уравнение: $\begin{cases}x^2=1-y^2,\\ x\le 0\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x\le 0.\end{cases}$ Это уравнение определяет часть окружности с центром в точке O и радиусом 1. Справа область ограничена прямой $x=1-y$.

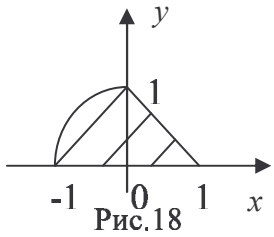

Рис.18

Изменим порядок интегрирования. Для этого уравнения граничных линий разрешим относительно y. Снизу область интегрирования ограничена одной линией $y=0$, но сверху имеем две граничные линии: $y=\sqrt{1-x^2}$ при $x\in[-1,0]$ и $y=1-x$ при $x\in[0,1]$ (рис. 18), поэтому в результате получим сумму двух повторных интегралов, то есть

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f(x,y)\,dy.$$

Пример 2.24. Найти площадь области (D), ограниченной линиями

$$y=-2x,\ \ y=2-x,\ \ y=\sqrt{x}.$$

Решение. Для вычисления площади данной фигуры воспользуемся формулой

$$S=\int\limits_{(D)} dS=\iint\limits_{(D)} dx\,dy.$$

По аналогии с предыдущими примерами расставим пределы интегрирования в повторном интеграле. Для этого построим область (D) (рис. 19), предварительно отыскав точки пересечения кривых: $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-2,4)$.

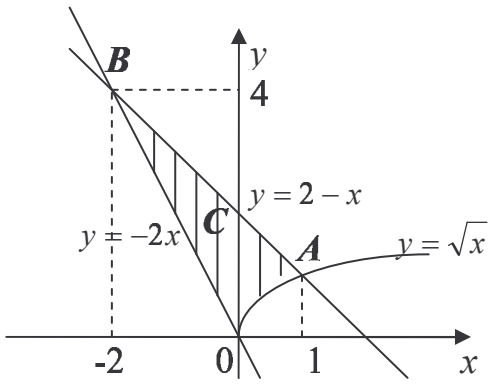

Рис. 19

Тогда $S=S_{OBC}+S_{OAC}$, то есть

$$S=\int\limits_{-2}^0 dx\int\limits_{-2x}^{2-x} dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} dy=\int\limits_{-2}^0\left(y\Big|_{-2x}^{2-x}\right)dx+\int\limits_0^1\left(y\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^0(2+x)\,dx+\int\limits_0^1\left(2-x-\sqrt{x}\right)dx=\frac{(2+x)^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{17}{6}.$$

Пример 2.25. Вычислить $\iint\limits_{(D)} y^2 \cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy$, если область (D) ограничена линиями $x=0,\quad y=\sqrt{2\pi},\quad y=x$.

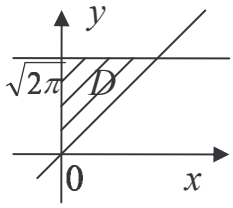

Рис.20

Решение. Построим данную область (рис. 20). В данном случае порядок интегрирования будем выбирать, учитывая не область интегрирования (она достаточно простая), а подынтегральную функцию, чтобы упростить вычисления при интегрировании. При вычислении интеграла $\int y^2 \cos\frac{xy}{2}dy$ придется дважды воспользоваться формулой интегрирования по частям, что не очень удобно. Поэтому сначала вычислим интеграл $\int y^2 \cos\frac{xy}{2}dx$. Итак,

$$\iint\limits_{(D)} y^2 \cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} y^2\,dy \int\limits_0^{y} \cos\frac{xy}{2}\,dx = \int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \left(y^2 \cdot \frac{2}{y} \sin\frac{xy}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=y} \right) dy = \int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} 2y \cdot \sin\frac{y^2}{2}\,dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin\frac{y^2}{2}\,d\left(\frac{y^2}{2}\right) = -2\cos\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2\pi}} = -2\cos\pi + 2\cos 0 = 4.$$

Пример 2.26. Найти статический момент однородного круга относительно его касательной.

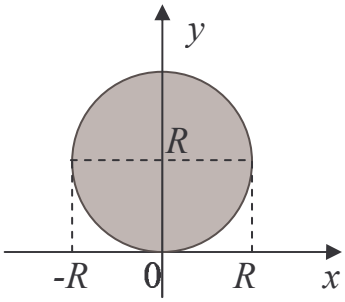

Рис.21

Решение. Введем систему координат таким образом, чтобы одна из координатных осей являлась касательной к кругу (рис. 21). Тогда ось OX будет касательной. Уравнение соответствующей окружности имеет вид: $x^2 + (y-R)^2 = R^2$.

Теперь наша задача – найти статический момент круга относительно оси OX. Так как фигура однородная, то плотность $\gamma = const$ и

$$S_{OX} = \iint\limits_{(D)} y \cdot \gamma\,dx\,dy = \gamma \iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy.$$

При расстановке пределов интегрирования воспользуемся тем, что верхняя часть окружности задается уравнением $y = R + \sqrt{R^2 - x^2}$, нижняя часть – уравнением $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$, где $x \in [-R, R]$. Поэтому имеем:

$$S_{OX} = \gamma \iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy = \gamma \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \gamma \int\limits_{-R}^{R} \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2}} \right) dx =$$

$$= 2\gamma R \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\gamma R \cdot \frac{S_{кр}}{2} = \pi R^3 \gamma.$$

При вычислении последнего интеграла воспользовались геометрическим смыслом определенного интеграла.

Пример 2.27. Вычислить среднее значение функции $f(x,y) = x + 2y$ в области (D), ограниченной линиями $y = 2x^2,\quad y = 3 - x^2$.

Решение Вычислим среднее значение функции по формуле $f_{cp} = \frac{1}{S}\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$, где S – площадь области (D).

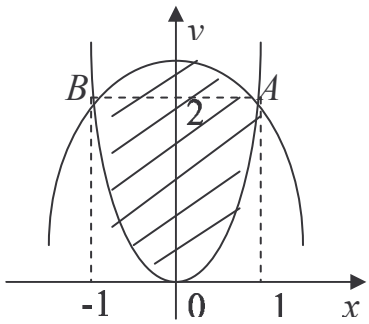

Рис.22

Точки пересечения линий $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$: $A(1,2)$, $B(-1,2)$ (рис. 22). Тогда

$$S = \iint\limits_{(D)} dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x^2} dy = \int\limits_{-1}^{1}\left(3-3x^2\right)dx = 2\int\limits_{0}^{1}\left(3-3x^2\right)dx = 2\left(3x-x^3\right)\Big|_0^1 = 4;$$

$$f_{cp} = \frac{1}{S}\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x^2}(x+2y)\,dy = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\left(xy+y^2\right)\Big|_{y=2x^2}^{y=3-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\left(9+3x-6x^2-3x^3-3x^4\right)dx = \frac{1}{4}\cdot 2\int\limits_{0}^{1}\left(9-6x^2-3x^4\right)dx = \frac{16}{5}.$$

Воспользовались тем, что интеграл от нечетной функции $\left(3x-3x^3\right)$ по отрезку $[-1,1]$ равен нулю, а от четной функции $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx$.

2.6. Тройной интеграл в прямоугольной системе координат

Пусть тело (V) ограничено поверхностями снизу $z = z_1(x,y)$, сверху $z = z_2(x,y)$, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ. Тогда

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{XY})} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}, \qquad (2.3)$$

где (V_{XY}) – есть проекция тела (V) на плоскость XOY.

Чтобы применять формулу (2.3) на практике, рекомендуем:

1) построить тело (V);
2) записать тройной интеграл через повторный интеграл; в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z. Для этого надо двигаться параллельно оси OZ. При этом мы войдем в тело через поверхность, на которой $z = z_1(x,y)$, а выйдем через поверхность, на которой $z = z_2(x,y)$. Таким образом, переменная интегрирования z меняется от $z_1(x,y)$ до $z_2(x,y)$;
3) вычислить внутренний интеграл при фиксированных x, y;
4) вычислить внешний интеграл по проекции тела (V) на плоскость XOY.

Пусть тело (V) ограничено поверхностями $y = y_1(x,z)$, $y = y_2(x,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OY. Тогда

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{XZ})} dxdz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy.} \qquad (2.4)$$

Пусть тело (V) ограничено поверхностями $x = x_1(y,z)$, $x = x_2(y,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OX. Тогда

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{YZ})} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx.} \qquad (2.5)$$

Пример 2.28. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} x^2 \sin \pi xy\, dx\, dy\, dz$, если тело (V) ограничено поверхностями $x = 1,\quad y = x/2,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad z = 8\pi$.

Решение. Снизу тело ограничено плоскостью $z = 0$, сверху – плоскостью $z = 8\pi$, сбоку – цилиндрической поверхностью (рис. 23), поэтому можно воспользоваться формулой (2.3). В двойном интеграле расставим пределы интегрирования, учитывая рекомендации п.2.5. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 \sin \pi xy\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(V_{XY})} dxdy \int\limits_0^{8\pi} x^2 \sin \pi xy\, dz = 8\pi \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x/2} x^2 \sin \pi xy\, dy =$$

$$= -8\pi \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{\pi x} \cos \pi xy \Big|_0^{x/2} \right) dx = -8 \int\limits_0^1 \left(x \cos \frac{\pi x^2}{2} - x \right) dx =$$

$$= -\frac{8}{\pi} \int\limits_0^1 \cos \frac{\pi x^2}{2}\, d\left(\frac{\pi x^2}{2} \right) + 8 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \left(-\frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi x^2}{2} \Big|_0^1 \right) + 4 = -\frac{8}{\pi} + 4.$$

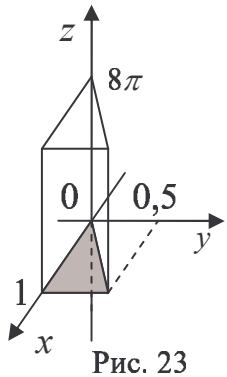

Рис. 23

Пример 2.29. Вычислить момент инерции I_{XZ} относительно плоскости XOZ однородного тела (V), ограниченного поверхностями $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad z = 10(3x + y),\quad x + y = 1$.

Решение. Найдем момент инерции по формуле

$$I_{XZ} = \iiint\limits_{(V)} y^2 \gamma\, dx\, dy\, dz.$$

Так как тело однородное, то $\gamma = const$.

Построим тело, ограниченное плоскостями

$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad z = 10(3x + y),\quad x + y = 1$ (рис. 24).

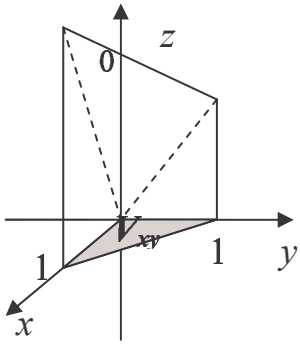

Рис. 24

Снизу тело ограничено плоскостью $z = 0$, сверху – плоскостью $z = 10(3x + y)$, сбоку – цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси OZ, поэтому можно воспользоваться формулой (2.3). При расстановке пределов интегрирования в двойном интеграле учтем, что проекция тела (V_{XY}) на плоскость XOY – треугольник, ограниченный прямыми $y = 1 - x,\quad y = 0,\quad x = 0$. Тогда

$$I_{XZ} = \iiint\limits_{(V)} y^2 \gamma\, dx\, dy\, dz = \gamma \iint\limits_{(V_{XY})} y^2 dx\, dy \int\limits_0^{10(3x+y)} dz = 10\gamma \iint\limits_{(V_{XY})} y^2 (3x + y)\, dx\, dy =$$

$$= 10\gamma \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(3xy^2 + y^3 \right) dy = 10\gamma \int\limits_0^1 \left(xy^3 + \frac{y^4}{4} \Big|_0^{1-x} \right) dx = 10\gamma \int\limits_0^1 \left(x(1-x)^3 + \frac{(1-x)^4}{4} \right) dx =$$

$$=10\gamma\left(-\frac{x(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^4\,dx\right)=10\gamma\left(-\frac{x(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1-\frac{(1-x)^5}{10}\Bigg|_0^1\right)=\gamma.$$

Пример 2.30. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=3z^2-2,\quad x=-4z^2+5,\quad y=4-x^2-9z^2,\quad y=1-7x^2-9z^2.$$

Решение. Справа тело ограничено поверхностью $y=4-x^2-9z^2$ (параболоид), слева – поверхностью $y=1-7x^2-9z^2$, сверху и снизу – цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси OY. Здесь удобнее спроецировать тело на плоскость OXZ, поэтому воспользуемся формулой (2.4). Тогда

$$V=\iiint\limits_{(V)}dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(V_{XZ})}dx\,dz\int\limits_{1-7x^2-9z^2}^{4-x^2-9z^2}dy=\iint\limits_{(V_{XZ})}\left(3+6x^2\right)dx\,dz.$$

Построим проекцию тела на плоскость OXZ (рис. 25). Найдем точки пересечения парабол:

$$\begin{cases}x=3z^2-2,\\ x=-4z^2+5,\end{cases}\Rightarrow 3z^2-2=-4z^2+5,\Rightarrow z=\pm1.$$

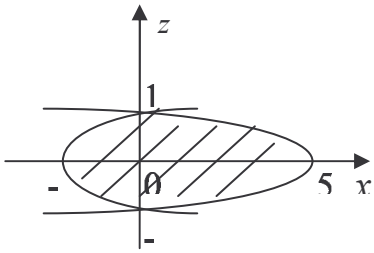

Рис. 25

Расставим пределы интегрирования:

$$V=\iint\limits_{(V_{XZ})}\left(3+6x^2\right)dx\,dz=\int\limits_{-1}^{1}dz\int\limits_{3z^2-2}^{5-4z^2}\left(3+6x^2\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(3x+2x^3\right)\Big|_{3z^2-2}^{5-4z^2}dz=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(287-693z^2+588z^4-182z^6\right)dz=2\left(287z-231z^3+\frac{588}{5}z^5-26z^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{1476}{5}.$$

Пример 2.31. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=2y^2,\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\quad z=0.$$

Решение. Сверху тело ограничено плоскостью $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$, снизу – плоскостью $z=0$, сбоку – цилиндрической поверхностью $x=2y^2$ с образующими, параллельными оси OZ (рис. 26). Поэтому

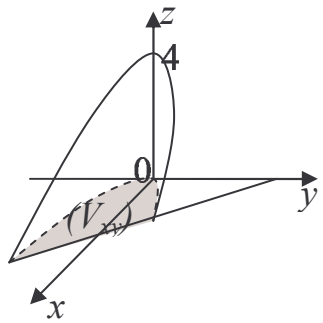

Рис. 26

$$V=\iiint\limits_{(V)}dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(V_{XY})}dx\,dy\int\limits_{0}^{4-2y-x}dz=\iint\limits_{(V_{XY})}(4-2y-x)\,dx\,dy.$$

Найдем линию пересечения плоскостей:

$$\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\\ z=0,\end{cases}\Rightarrow x=4-2y.$$

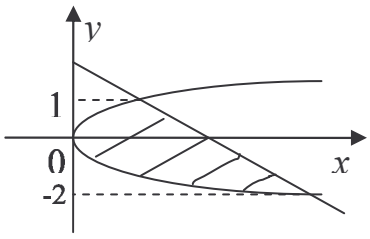

Рис. 27

Проекция (V_{XY}) ограничена параболой $x=2y^2$ и прямой $x=4-2y$ (рис. 27). Найдем точки пересечения этих линий:

$$\begin{cases} x = 4 - 2y, \\ x = 2y^2, \end{cases} \Rightarrow \quad 2y^2 = 4 - 2y, \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2, \ y_2 = 1.$$

Таким образом, имеем:

$$V = \int_{-2}^{1} dy \int_{2y^2}^{4-2y} (4 - 2y - x)\,dx = \int_{-2}^{1} \left((4-2y)x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{2y^2}^{4-2y} dy =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(\frac{(4-2y)^2}{2} - 8y^2 + 4y^3 + 2y^4 \right) dy = \left(-\frac{(4-2y)^3}{12} - \frac{8}{3}y^3 + y^4 + \frac{2}{5}y^5 \right) \Bigg|_{-2}^{1} = 16,2.$$

2.7. Двойной интеграл в криволинейной системе координат

Для вычисления двойного интеграла иногда удобно использовать не прямоугольные координаты (x, y), а некоторые другие координаты (u, v), которые часто называют криволинейными. Пусть известна связь между прямоугольными и криволинейными координатами

$$x = x(u, v), \ \ y = y(u, v).$$

Будем предполагать, что якобиан $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$ следует заменить $x, y, dxdy$ на их выражения в криволинейной системе координат

$$x = x(u, v), \ \ y = y(u, v), \ \ dx\,dy = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\,dv.$$

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S^*)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\,dv, \qquad (2.6)$$

где (S^*) есть область изменения переменных (u, v).

Замечание. Иногда удобнее вычислить не якобиан $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = I$, а якобиан $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)} = I_1$.

Можно показать, что $I = \dfrac{1}{I_1}$ (по аналогии с производной обратной функции $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$).

Пример 2.32. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100.$$

Решение. Перейдем к криволинейным координатам следующим образом: $u = x - 2y + 3, \ \ v = 3x + 4y - 1$. Тогда уравнение линии в новой системе координат примет вид $u^2 + v^2 = 100$. Таким образом, получили уравнение окружности в плоскости Ouv (рис. 28).

Вычислим якобиан $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=10$. Тогда $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\dfrac{1}{10}$ и, воспользовавшись формулой (2.6), получим:

$$S=\int\limits_{(D)} ds=\iint\limits_{(D)} dx\,dy=\iint\limits_{(D_1)} \frac{1}{10}\,du\,dv=\frac{1}{10}S_{круга}=\frac{1}{10}\cdot 100\pi=10\pi .$$

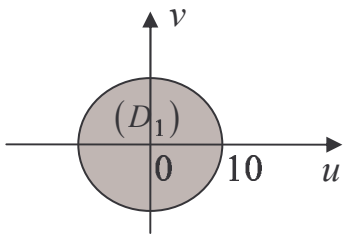

Рис. 28

При вычислении интеграла использовали геометрический смысл двойного интеграла.

Пример 2.33. Найти массу однородной фигуры, ограниченной линиями $x^2=2y,\quad x^2=3y,\quad x^3=y^2,\quad x^3=4y^2$.

Решение. Введем криволинейные координаты: $u=\dfrac{x^2}{y},\quad v=\dfrac{x^3}{y^2}$.

Заметим, что переменные связаны соотношением $\dfrac{v}{u}=\dfrac{x}{y}$.

В новой системе координат фигура ограничена линиями $u=2$, $u=3$, $v=1$, $v=4$ (рис. 29). Вычислим якобианы

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ \dfrac{3x^2}{y^2} & -\dfrac{2x^3}{y^3} \end{vmatrix}=-\frac{x^4}{y^4}=-\frac{v^4}{u^4},\qquad \frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{u^4}{v^4}.$$

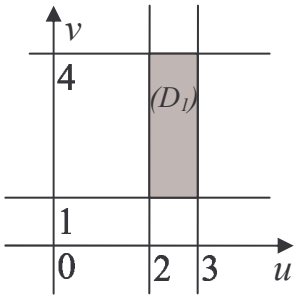

Рис. 29

Так как фигура однородная, то $\gamma=const$. По формуле (2.6) имеем

$$m=\iint\limits_{(D)}\gamma\,dx\,dy=\gamma\iint\limits_{(D_1)}\left|-\frac{u^4}{v^4}\right|du\,dv=\gamma\int\limits_2^3 u^4du\int\limits_1^4\frac{dv}{v^4}=\gamma\left(\frac{u^5}{5}\Bigg|_2^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3v^3}\Bigg|_1^4\right)=\frac{4431}{320}\gamma .$$

Двойной интеграл в полярной системе координат

Полярные координаты являются одними из наиболее употребительных криволинейных координат.

Пусть область (S) заключена (рис. 30) между лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ и ограничена линиями с уравнениями $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$.

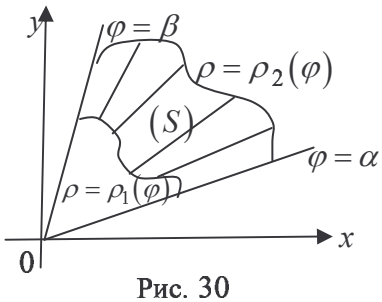

Рис. 30

Тогда имеет место формула

$$\boxed{\int\limits_{(S)} f(P)\,dS=\iint\limits_{(S)} f(\rho,\varphi)\,\rho\;d\rho\,d\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho .}$$

Чтобы применять на практике эту формулу, рекомендуем:

1) в двойном интеграле $\int\limits_{(S)} f(P)\,dS = \int\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy$ заменить x, y, $dS = dxdy$ на их выражения в полярной системе координат, т.е.

$$dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ x^2 + y^2 = \rho^2;$$

2) записать получившийся двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения ρ. Для этого надо двигаться <u>по лучу</u>, выходящему из полюса (рис. 30); при этом ρ меняется от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$;

3) расставить <u>внешние</u> пределы интегрирования, определив лучи $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, между которыми заключена фигура (внешние пределы всегда <u>числа</u>, а не функции);

4) вычислить внутренний интеграл при постоянном φ, затем – внешний интеграл.

Замечания

1). Полярной системой пользуются, если область интегрирования ограничена окружностью, или линией $\rho = \rho(\varphi)$, или линией, уравнение которой содержит $x^2 + y^2$.

2). Если уравнение линии, ограничивающей область, или подынтегральная функция содержат $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то удобно перейти к обобщенным полярным координатам

$$x = a\cdot\rho\cos\varphi,\quad y = b\cdot\rho\sin\varphi;\ \text{тогда}\ dS = dxdy = ab\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Пример 2.34. Вычислить $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-\sqrt{9-y^2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \sqrt{36 - x^2 - y^2}\, dx$.

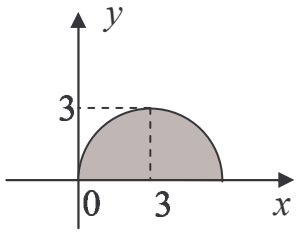

Рис.31

Решение. Область (D) ограничена линиями $x = 3 \pm \sqrt{9 - y^2}$, $y \in [0,3]$. Преобразуя эти уравнения, получим уравнение окружности $(x-3)^2 + y^2 = 9$ или $x^2 + y^2 = 6x$. Таким образом, область интегрирования – полукруг (рис. 31), поэтому имеет смысл перейти к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$

Запишем уравнение окружности и подынтегральную функцию в полярной системе:

$$x^2 + y^2 = 6x \ \Rightarrow\ \rho^2 = 6\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = 6\cos\varphi,\ \sqrt{36 - x^2 - y^2} = \sqrt{36 - \rho^2}.$$

Область находится в первой четверти, поэтому $\varphi \in [0,\ \pi/2]$. Итак,

$$\int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-\sqrt{9-y^2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \sqrt{36 - x^2 - y^2}\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{6\cos\varphi} \sqrt{36 - \rho^2}\cdot\rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{6\cos\varphi} \sqrt{36 - \rho^2}\, d\left(36 - \rho^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\left(36 - \rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{6\cos\varphi}\right)d\varphi = -\frac{6^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3\varphi - 1\right)d\varphi = \frac{6^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1 - \cos^2\varphi\right)d\cos\varphi + \frac{6^3}{3}\varphi\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 72\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} + 36\pi = 36\pi - 48$$

Пример 2.35. Найти массу пластины, ограниченной линиями $\rho = 1$, $\rho = 2\sin\varphi$, содержащей точку с декартовыми координатами $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, если плотность $\gamma = |x|$.

Решение. Построим соответствующую область (рис. 32). Так как фигура симметрична относительно оси OY, то вычислим массу m_1 фигуры (D_1), расположенной в первой координатной четверти. Тогда масса всей пластины

$$m = 2m_1, \text{ где } m_1 = \iint\limits_{(D_1)} \gamma\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

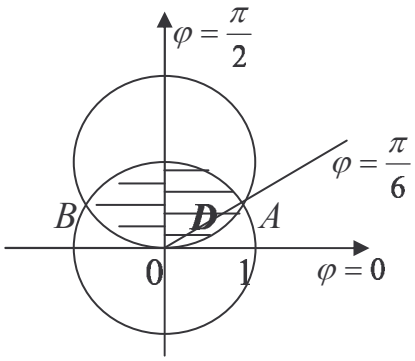

Рис. 32

Пусть A и B – точки пересечения окружностей. Вычислим угол φ_1, соответствующий точке A, решив систему уравнений: $\rho = 1$, $\rho = 2\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 1/2 \Rightarrow \varphi_1 = \pi/6$.

В первой координатной четверти $x \ge 0$, поэтому $\gamma = |x| = x = \rho\cos\varphi$. Тогда

$$m_1 = \iint\limits_{(D_1)} \cos\varphi \cdot \rho^2\, d\rho\, d\varphi.$$

Фигура (D_1) ограничена линией $\rho = 2\sin\varphi$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ и линией $\rho = 1$ при $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, поэтому двойной интеграл запишем в виде двух повторных интегралов:

$$m_1 = \iint\limits_{(D_1)} \cos\varphi \cdot \rho^2\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/6} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho^2 d\rho + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/6} \sin^3\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{3}\sin\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{5}{24}.$$

Таким образом, $m = 2m_1 = 5/12$.

Пример 2.36. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$\rho = a\cos 5\varphi,\ a > 0.$$

Решение. Так как $\rho \ge 0$, то $\cos 5\varphi \ge 0$, значит

$$5\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}\right], n \in Z.$$

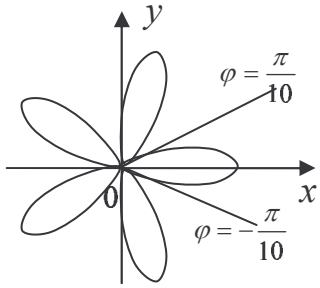

Рис. 33

Период функции $\cos 5\varphi$ равен $T = 2\pi/5$, следовательно, фигура состоит из 5 одинаковых по площади «лепестков» (рис. 33).

Поэтому вычислим площадь S_1 одного «лепестка», для которого $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}\right]$:

$$S_1 = \int\limits_{(D)} ds = \int\limits_{-\pi/10}^{\pi/10} d\varphi \int\limits_0^{a\cos 5\varphi} \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi/10}^{\pi/10} \cos^2 5\varphi\, d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi/10} \cos^2 5\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/10} (1 + \cos 10\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{10}\sin 10\varphi\right)\Big|_0^{\pi/10} = \frac{a^2\pi}{20}.$$

Следовательно, $S = 5S_1 = a^2\pi/4$.

Пример 2.37. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4,\ y=\frac{3}{2}x,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$ если плотность $\gamma=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$.

Решение. Фигура ограничена двумя прямыми и двумя эллипсами (рис. 34), поэтому удобно использовать обобщенные полярные координаты

$$x=2\rho\cos\varphi,\ \ y=3\rho\sin\varphi.$$

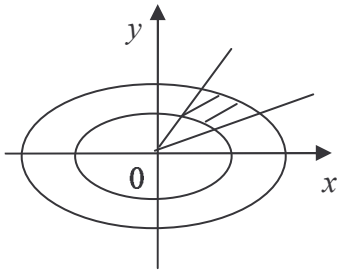

Рис.34

Тогда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\rho^2$, $dS=6\rho\,d\rho\,d\varphi$, $\gamma=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}=\rho$, а уравнения линий примут вид:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\ \Rightarrow \rho^2=1\ \Rightarrow \rho=1;\qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4\ \Rightarrow \rho^2=4\ \Rightarrow \rho=2$$

$$y=\frac{3}{2}x\ \Rightarrow\ 3\rho\sin\varphi=\frac{3}{2}\cdot 2\rho\cos\varphi\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=1\ \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4};$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x\ \Rightarrow\ 3\rho\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\rho\cos\varphi\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}.$$

Поэтому

$$m=\int\limits_{(D)}\gamma\,dS=\iint\limits_{(D)}\rho\cdot 6\ \rho\,d\rho\,d\varphi=6\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{1}^{2}\rho^2 d\rho=\frac{7\pi}{6}.$$

2.8. Тройной интеграл в криволинейной системе координат

Для вычисления тройного интеграла иногда удобно использовать не прямоугольные координаты (x,y,z), а некоторые криволинейные координаты (u,v,w). Пусть известна связь между этими координатами

$$x=x(u,v,w),\ \ y=y(u,v,w),\ \ z=z(u,v,w)\quad \text{и}\quad \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}\neq 0.$$

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV=\int\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$ следует заменить x, y, z, dV на их выражения в криволинейной системе координат

$$x=x(u,v,w),\ \ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w),\quad dV=dx\,dy\,dz=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw.$$

Замечание. Иногда удобнее вычислить не якобиан $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=I$, а якобиан $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=I_1$.

Тогда искомый якобиан $I=\frac{1}{I_1}$.

Пример 2.38. Вычислить объем тела (V), ограниченного поверхностью

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=R^2.$$

Решение. Введем новые переменные

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad v = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad w = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

Тогда в новой системе координат уравнение поверхности примет вид $u^2 + v^2 + w^2 = R^2$, т.е. определяет сферу, а тело (V^*) есть шар объемом $V^* = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Вычислим якобианы $\Delta = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)} = \frac{1}{\Delta}$.

Тогда искомый объем равен

$$V = \int\limits_{(V)} dV = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V^*)} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\right| du\,dv\,dw = \frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{(V^*)} du\,dv\,dw = \frac{1}{|\Delta|}\cdot V^* = \frac{1}{|\Delta|}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Тройной интеграл в цилиндрической системе координат

В цилиндрической системе координат положение точки M в пространстве однозначно определяется тройкой чисел ρ, φ, z, где ρ, φ – полярные координаты проекции точки M на плоскость OXY, z – аппликата точки M.

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV = \int\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$ следует

1) заменить x, y, z, dV на их выражения в цилиндрической системе координат,

$$x = \rho\cdot\cos\varphi, \quad y = \rho\cdot\sin\varphi, \quad z = z, \quad dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz;$$

2) заменить область (V) изменения переменных (x,y,z) на область (V^*) изменения переменных (ρ,φ,z).

Замечания

1). К цилиндрическим координатам целесообразно переходить, когда уравнения поверхностей, ограничивающих тело, содержат $x^2 + y^2$.

2). Внутреннее интегрирование обычно удобно вести по z.

3). Если уравнение поверхности, ограничивающей область, или подынтегральная функция содержат $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то удобно перейти к обобщенным цилиндрическим координатам

$$x = a\cdot\rho\cos\varphi, \quad y = b\cdot\rho\sin\varphi, \quad z = z; \text{ тогда } dV = ab\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Пример 2.39. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 4, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 3z.$$

Решение. Уравнение $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 4$ задает эллипсоид, а уравнение $\frac{x^2}{4} + y^2 = 3z$ – параболоид (рис.35). Перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам:

$$x = 2\rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z \quad\Rightarrow\quad dV = 2\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz\,.$$

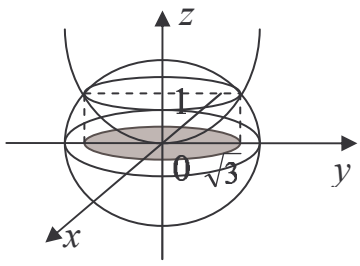

Рис. 35

Уравнение параболоида $\frac{x^2}{4} + y^2 = 3z$ примет вид $z = \rho^2/3$;

уравнение эллипсоида $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 4$ примет вид $z^2 = 4 - \rho^2$

или $z = +\sqrt{4-\rho^2}$ для верхней части сферы. Поэтому

$$V = \int\limits_{(V)} dV = \iint\limits_{(V_{XY})} 2\rho\, d\rho\, d\varphi \int\limits_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \iint\limits_{(V_{XY})} 2\rho\left(\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3}\right) d\rho\, d\varphi\,.$$

Для отыскания проекции (V_{XY}) тела на плоскость OXY найдем линию пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} z = \sqrt{4-\rho^2}, \\ z = \rho^2/3, \end{cases} \Rightarrow \sqrt{4-\rho^2} = \rho^2/3 \;\Rightarrow\; 4 - \rho^2 = \rho^4/9 \;\Rightarrow\; \rho^2 = 3,\ \rho^2 = -12 \;\Rightarrow\; \rho = \sqrt{3}\,.$$

Итак, проекция (V_{XY}) ограничена линией $\rho = \sqrt{3}$ (рис. 35). Поэтому

$$V = \iint\limits_{(V_{XY})} 2\rho\left(\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3}\right) d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} 2\rho\left(\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-\rho^2}\, d\left(4-\rho^2\right) - \frac{2}{3}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho\right) = 2\pi\left(-\frac{2}{3}\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{\rho^4}{6}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right) = \frac{19\pi}{3}\,.$$

Пример 2.40. Найти центр тяжести однородного круглого конуса высотой H и радиусом R (рис.36).

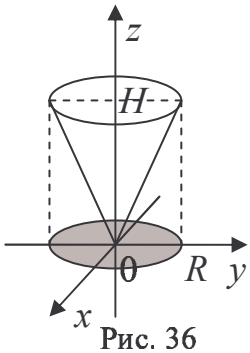

Рис. 36

Решение. Уравнение произвольного конуса имеет вид:

$$x^2 + y^2 = k\, z^2\,.$$

Чтобы найти коэффициент k, подставим начальные условия $x^2 + y^2 = R^2$, $z = H$ в уравнение конуса. Тогда $R^2 = kH^2 \;\Rightarrow\; k = \frac{R^2}{H^2}$.

Таким образом, уравнение конуса примет вид: $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$.

Найдем координаты центра тяжести $x_c,\ y_c,\ z_c$.

Так как конус однородный ($\gamma = const$) и симметричный относительно оси OZ, то

$$x_c = y_c = 0,\quad z_c = \frac{\int\limits_{(V)} z\cdot\gamma\, dV}{\int\limits_{(V)} \gamma\, dV} = \frac{\gamma\int\limits_{(V)} z\, dV}{\gamma\int\limits_{(V)} dV} = \frac{\int\limits_{(V)} z\, dV}{\int\limits_{(V)} dV}\,.$$

Воспользуемся геометрическим смыслом тройного интеграла

$$\int\limits_{(V)} dV = V_{\text{конуса}} = \frac{\pi R^2 H}{3}\,.$$

Для вычисления $\int\limits_{(V)} z\,dV$ перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z,\quad dV=\rho d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Запишем уравнение конуса в этих координатах:

$$x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2 \;\Rightarrow\; \rho^2=\frac{R^2}{H^2}z^2 \;\Rightarrow\; z=\frac{H}{R}\rho \text{ (на верхней части конуса } z\ge 0\text{)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{(V)} z\,dV=\iint\limits_{(V_{XY})}\rho\,d\rho\,d\varphi\int\limits_{\frac{H\rho}{R}}^{H} z\,dz=\iint\limits_{(V_{XY})}\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\frac{H\rho}{R}}^{H}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{H^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(\rho-\frac{\rho^3}{R^2}\right)d\rho=$$

$$=\frac{H^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4R^2}\Bigg|_0^R\right)d\varphi=\frac{H^2}{2}\cdot\frac{R^2}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi R^2H^2}{4}.$$

Тогда $z_c=\dfrac{\int\limits_{(V)} z\,dV}{\int\limits_{(V)} dV}=\dfrac{\pi R^2H^2}{4}\cdot\dfrac{3}{\pi R^2H}=\dfrac{3}{4}H$. Итак, центр тяжести $C\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}H\right)$.

Пример 2.41. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=x,\quad x^2+y^2=2x,\quad z=x^2+y^2,\quad z=0,\quad x+y=0,\quad x-y=0.$$

Решение. Запишем уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат:

$$\rho^2=\rho\cos\varphi,\ \rho^2=2\rho\cos\varphi,\ z=\rho^2,\ z=0,\ \rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi=0,\ \rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi=0$$

или после преобразования

$$\rho=\cos\varphi,\quad \rho=2\cos\varphi,\quad z=\rho^2,\quad z=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{4},\quad \varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

Проекция тела на плоскость OXY изображена на рис. 37.

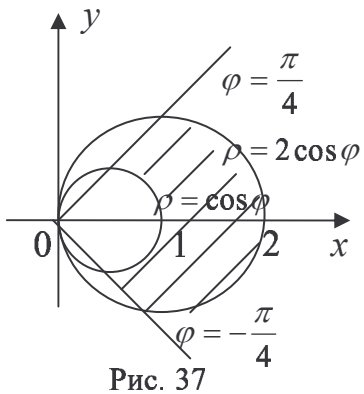

Рис. 37

Найдем объем тела:

$$V=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\rho^2}dz=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho^3\,d\rho=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{15}{4}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{15}{8}\cdot\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{45\pi}{64}+\frac{15}{8}.$$

Тройной интеграл в сферической системе координат

Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве можно охарактеризовать с помощью сферических координат (r,θ,φ), где r – длина радиус-вектора точки M (рис. 38), θ – угол отклонения радиус-вектора точки M от оси OZ $(0\le\theta\le\pi)$,

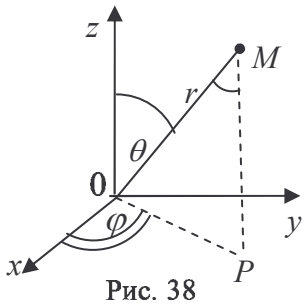

Рис. 38

φ – угол отклонения от оси OX проекции на плоскость XOY радиус-вектора точки M $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Связь между прямоугольными и сферическими координатами:

$$\boxed{x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \quad z = r\cdot\cos\theta; \qquad x^2+y^2+z^2=r^2.}$$

Элемент объема в сферических координатах

$$\boxed{dV = dxdydz = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}.$$

Замечания

1). К сферическим координатам целесообразно переходить, когда тело ограничено сферой $r = const$, конусом $\theta = const$ или поверхностью, уравнение которой содержит $x^2+y^2+z^2$.

2). Наиболее удобен порядок интегрирования (слева направо) по φ, θ, r.

3). Сначала расставить пределы интегрирования по r (двигаясь по лучу из начала координат), потом — по θ (двигаясь от оси OZ), потом — по φ.

4). Если уравнение границы области или подынтегральная функция содержат $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, то следует перейти к обобщенным сферическим координатам

$$x = a\cdot r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = b\cdot r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c\cdot r\cos\theta;$$

тогда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$, $\quad dV = abc\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$

Пример 2.42. Найти момент инерции однородного шара относительно касательной плоскости.

Решение. Введем систему координат таким образом, чтобы касательная плоскость совпала с координатной плоскостью OXY, а центр сферы находился на оси OZ (рис. 39). Запишем уравнение сферы:

$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ или $x^2+y^2+z^2=2Rz$, где R – радиус сферы.

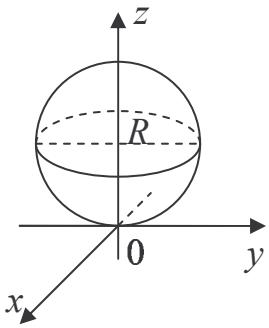

Рис. 39

В сферической системе координат, учитывая, что $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z = r\cdot\cos\theta$, уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=2Rz$ примет вид $r^2 = 2Rr\cos\theta$ или $r = 2R\cos\theta$, где $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Так как $\gamma = const$, $z = r\cdot\cos\theta$, $\quad dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, то

$$I_{XY} = \int\limits_{(V)} z^2\gamma\, dV = \gamma\iiint\limits_{(V)} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \gamma\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta} r^4\, dr =$$

$$= \frac{-32R^5\gamma}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^7\theta\, d(\cos\theta) = -\frac{32R^5\gamma}{5}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{\cos^8\theta}{8}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = \frac{8R^5\gamma\pi}{5}.$$

Пример 2.43. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$64 \le x^2+y^2+z^2 \le 169, \quad z \le -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, \quad y \ge 0, \quad y \ge -\sqrt{3}\,x.$$

Решение. Тело ограничено сферами $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=169$, конусом $z=-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, плоскостями $y=0$, $y=-\sqrt{3}\,x$. Сечение тела плоскостью YOZ изображено на рис. 40, плоскостью XOY – на рис. 41.

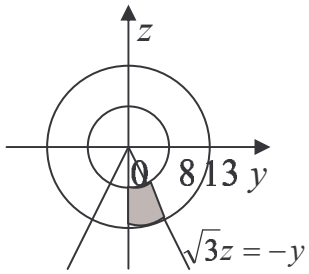

Рис. 40

Перейдем к сферической системе координат:

$$x^2+y^2+z^2=64 \;\Rightarrow\; r^2=64 \;\Rightarrow\; r=8,$$

$$x^2+y^2+z^2=169 \;\Rightarrow\; r^2=169 \;\Rightarrow\; r=13,$$

$$z=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; r\cos\theta=-\frac{r\sin\theta}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \theta=\frac{2\pi}{3},$$

$$y=-\sqrt{3}\,x \;\Rightarrow\; r\sin\theta\cdot\sin\varphi=-\sqrt{3}\,r\sin\theta\cdot\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \varphi=\frac{2\pi}{3}.$$

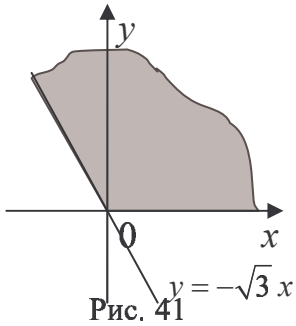

Рис. 41

Таким образом, в сферической системе координат тело задается неравенствами: $8 \le r \le 13$, $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$. Поэтому

$$V=\int\limits_{(V)} dV=\iiint\limits_{(V)} r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi/3} d\varphi\int\limits_{2\pi/3}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_8^{13} r^2dr=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\cos\theta\Big|_{2\pi/3}^{\pi}\right)\cdot\frac{13^3-8^3}{3}=\frac{1685\pi}{9}.$$

Пример 2.44. Найти массу тела плотностью $\gamma=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}$, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

Решение. Перейдем к обобщенным сферическим координатам

$$x=a\cdot r\sin\theta\cos\varphi, \quad y=b\cdot r\sin\theta\sin\varphi, \quad z=c\cdot r\cos\theta, \quad dV=abc\cdot r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Тогда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(r\sin\theta\cos\varphi\right)^2+\left(r\sin\theta\sin\varphi\right)^2=r^2\sin^2\theta$ и уравнение поверхности примет вид $r^4=r^2\sin^2\theta$ или $r=\sin\theta$. Плотность $\gamma=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}=r$. Поэтому

$$m=\int\limits_{(V)}\gamma\,dV=\iiint\limits_{(V)} r\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{\sin\theta} r^3dr=\frac{2\pi}{4}\int\limits_0^{\pi}\sin^5\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{-\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)^2 d\left(\cos\theta\right)=\frac{-\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)d\left(\cos\theta\right)=\frac{8\pi}{15}.$$

2.9. Поверхностный интеграл I рода

Вычисление поверхностного интеграла I рода $\int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma$ сводится к вычислению двойного интеграла по проекции поверхности (σ) на одну из координатных плоскостей.

Если поверхность (σ) задана уравнением $z = z(x,y)$, то

$$d\sigma = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy, \quad \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} f\big(x,y,z(x,y)\big)\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy.$$

Если поверхность (σ) задана уравнением $x = x(y,z)$, то

$$d\sigma = \sqrt{1+x_z'^2+x_y'^2}\,dydz, \quad \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{YZ})} f\big(x(y,z),y,z\big)\cdot\sqrt{1+x_z'^2+x_y'^2}\,dydz.$$

Если поверхность (σ) задана уравнением $y = y(x,z)$, то

$$d\sigma = \sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz, \quad \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{XZ})} f\big(x,y(x,z),z\big)\cdot\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz.$$

Пример 2.45. Найти площадь части поверхности $z = x^2+y^2$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=2$ (внутри цилиндра).

Решение. Вычислим площадь поверхности по формуле $\sigma = \int\limits_{(\sigma)} d\sigma$.

Уравнение поверхности $z = x^2+y^2$ разрешено относительно z, поэтому найдем $d\sigma$ по формуле:

$$d\sigma = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

Тогда $\sigma = \int\limits_{(\sigma)} d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$, где проекция (σ_{XY}) поверхности (σ) на плоскость XOY есть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2$ (рис. 42), поэтому для вычисления двойного интеграла перейдем к полярной системе координат:

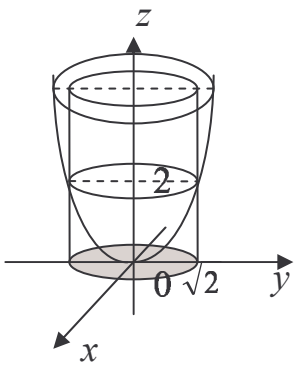

Рис. 42

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad dxdy = \rho\,d\rho\,d\varphi; \quad \sqrt{1+4x^2+4y^2} = \sqrt{1+4\rho^2};$$

$$x^2+y^2=2 \quad\Rightarrow\quad \rho=\sqrt{2}, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Тогда $\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} \sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,d\rho =$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{8}\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\,d\big(1+4\rho^2\big) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\big(1+4\rho^2\big)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}(27-1) = \frac{13\pi}{3}.$$

Пример 2.46. Найти массу однородной поверхности $y^2+z^2=8x$, отсекаемой цилиндром $y^2=2x$ и плоскостью $x=6$ (вне цилиндра).

Решение. Уравнение поверхности $y^2+z^2=8x$ удобно разрешить относительно x: $x=\dfrac{y^2+z^2}{8}$, поэтому

$$d\sigma=\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz=\sqrt{1+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}}\,dydz,\quad m=\int\limits_{(\sigma)}\gamma\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{YZ})}\gamma\sqrt{1+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}}\,dydz.$$

Найдем проекцию вырезаемой поверхности на плоскость YOZ (рис. 43), исключив переменную x из уравнений:

$\begin{cases} y^2+z^2=8x, \\ y^2=2x, \end{cases} \Rightarrow y^2+z^2=4y^2 \Rightarrow z^2=3y^2 \Rightarrow z=\pm y\sqrt{3}$ (прямые в плоскости YOZ);

$\begin{cases} y^2+z^2=8x, \\ x=6, \end{cases} \Rightarrow y^2+z^2=48$ – окружность в плоскости YOZ.

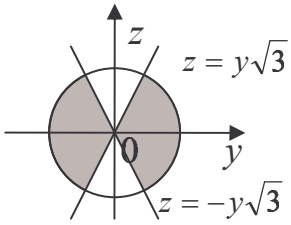

Рис. 43

Так как проекция (σ_{YZ}) состоит из секторов круга, то при вычислении двойного интеграла удобно перейти к полярной системе координат: $\begin{cases} y=\rho\cos\varphi, \\ z=\rho\sin\varphi, \end{cases}$ $dydz=\rho\,d\rho\,d\varphi$. Преобразуем уравнения прямых, окружности и подынтегральную функцию:

$$z=\pm y\sqrt{3} \Rightarrow \rho\sin\varphi=\pm\sqrt{3}\,\rho\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{3};$$

$$y^2+z^2=48 \Rightarrow \rho^2=48 \Rightarrow \rho=4\sqrt{3};\qquad \sqrt{1+\frac{y^2+z^2}{16}}=\sqrt{1+\frac{\rho^2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{16+\rho^2}.$$

Учитывая, что $\gamma=const$, имеем:

$$m=\int\limits_{(\sigma)}\gamma\,d\sigma=\gamma\iint\limits_{(\sigma_{YZ})}\sqrt{1+\frac{y^2+z^2}{16}}\,dydz=\frac{\gamma}{4}\iint\limits_{(\sigma_{YZ})}\sqrt{16+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{4\gamma}{4}\int\limits_0^{\pi/3}d\varphi\int\limits_0^{4\sqrt{3}}\rho\sqrt{16+\rho^2}\,d\rho=$$

$$=\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^{\pi/3}d\varphi\int\limits_0^{4\sqrt{3}}\sqrt{16+\rho^2}\,d\left(16+\rho^2\right)=\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(16+\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{4\sqrt{3}}=\frac{448\,\pi\gamma}{9}.$$

При вычислении интеграла учли, что фигура (σ_{YZ}) симметрична относительно начала координат и осей координат.

Пример 2.47. Найти положение центра тяжести верхней полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если ее поверхностная плотность γ в любой точке равна расстоянию от этой точки до оси OZ.

Решение. Так как поверхность симметрична относительно оси OZ и $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$ – четная функция относительно x и y, то $x_C=y_C=0$,

$$z_C = \frac{\int\limits_{(\sigma)} z \cdot \gamma \, d\sigma}{\int\limits_{(\sigma)} \gamma \, d\sigma} = \frac{I_1}{I_2}, \text{ где } \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}, \; z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Проекцией на плоскость XOY является круг, поэтому перейдем к полярным координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ тогда $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - \rho^2}$,

$$d\sigma = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = \frac{R \cdot \rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho\, d\varphi.$$

$$I_1 = \int\limits_{(\sigma)} z \cdot \gamma \, d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \cdot \frac{R \cdot \rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho = R \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = R \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi R^4}{3},$$

$$I_2 = \int\limits_{(\sigma)} \gamma \, d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho \cdot \frac{R \cdot \rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho = 2\pi R \int\limits_0^R \frac{\rho^2 - R^2 + R^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \left(-R \cdot \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho + R^3 \cdot \int\limits_0^R \frac{d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) = 2\pi \cdot \left(-R \cdot \frac{1}{4} S_{круга} + R^3 \arcsin \frac{\rho}{R} \Big|_0^R \right) =$$

$$= 2\pi \cdot \left(-R \cdot \frac{\pi R^2}{4} + R^3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

Тогда $z_C = \frac{I_1}{I_2} = \frac{2\pi R^4}{3} \cdot \frac{2}{\pi^2 R^3} = \frac{4R}{3\pi}$. Итак, центр тяжести $C\left(0, 0, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

3. Скалярное поле

Множество точек поля, в которых функция поля $f(x, y, z)$ принимает постоянное значение C, образует поверхность с уравнением $f(x, y, z) = C$, называемую ***поверхностью уровня*** поля. Если скалярное поле плоское и находится, например, в плоскости XOY, то его функция поля $f(x, y)$ зависит от двух переменных x и y, а множество точек, в которых $f(x, y) = C$, образует ***линию уровня***.

Производная поля по направлению и градиент

Производную поля $f(M)$ по направлению $\vec{l}$ можно вычислить по формуле

$$\boxed{\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \text{grad}\, f(M) \cdot \vec{l_0},}$$

где $\text{grad}\, f(M) = \left\{ f_x'(M),\ f_y'(M),\ f_z'(M) \right\}$ — градиент скалярного поля $f(M)$, $\vec{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ — единичный вектор направления $\vec{l}$.

Свойства производной по направлению и градиента

1). Скорость изменения функции $f(M)$ в точке M_0 в направлении $\vec{l}$ равна $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$.

2). Поле $f(M)$ в точке M_0 в направлении $\vec{l}$ возрастает (соответственно, убывает) тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) \geq 0$ (соответственно, $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) \leq 0$).

3). Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего возрастает в направлении вектора $\operatorname{grad} f(M_0)$ со скоростью, равной $\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$.

4). Вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0.

5). $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$, $\operatorname{grad}(u \cdot v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$,

$\operatorname{grad} f(u) = f'_u \cdot \operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}$, $\operatorname{grad}(\vec{r}, \vec{a}) = \vec{a}$ $(\vec{a} - \textit{постоянный вектор})$.

Пример 3.1. Построить линии уровня поля $f(x,y) = \frac{16-y^2}{x^2}$. Найти производную поля в точке $M_0\left(2;\, 2\sqrt{3}\right)$ в направлении касательной и в направлении нормали к линии уровня поля, проходящей через точку M_0.

Решение. Линия уровня есть множество точек, в которых скалярная функция имеет одно и то же значение; в нашем примере $\frac{16-y^2}{x^2} = C,\ x \neq 0$.

Если $C = 0$, то $16 - y^2 = 0$; получаем две прямые $y = 4$ и $y = -4$ (рис. 44).

Если $C > 0$ $\left(C = a^2\right)$, то $16 - y^2 = a^2 x^2$ или $\frac{x^2}{16/a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$ – это уравнение эллипса с центром в начале координат; в частном случае при $C = 1$ получаем уравнение окружности $x^2 + y^2 = 16$. Точка $M_0(4,0)$ принадлежит этой окружности.

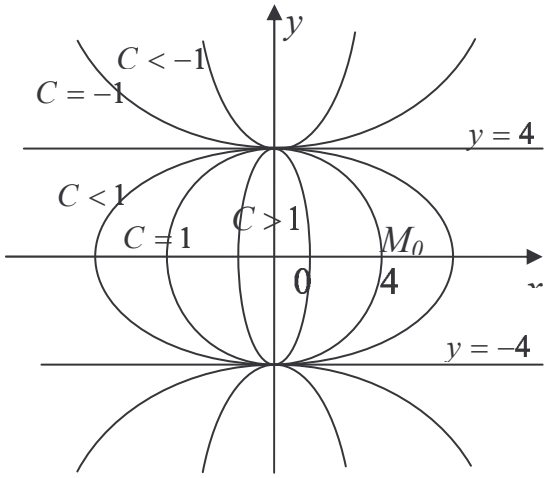

Рис. 44

Если $C < 0$ $\left(C = -a^2\right)$, то $\frac{16-y^2}{x^2} = -a^2$ или $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16/a^2} = 1$ – уравнение сопряженной гиперболы.

Для вычисления производной поля по направлению касательной к линии $x^2 + y^2 = 16$ в точке M_0 найдем направляющий вектор касательной. Запишем уравнение окружности в параметрическом виде: $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t$ или $\vec{r} = \{4\cos t, 4\sin t\}$. В точке $M_0\left(2;\, 2\sqrt{3}\right)$ $4\cos t_0 = 2,\ 4\sin t_0 = 2\sqrt{3} \Rightarrow t_0 = \pi/3$. Вектор $\vec{r}'(t_0) = \{-4\sin t, 4\cos t\}_{t=t_0} = \left\{-2\sqrt{3}, 2\right\} = \vec{\tau}$ на-

правлен по касательной к линии в точке M_0, $\vec{\tau}_0 = \frac{\vec{\tau}}{|\vec{\tau}|} = \left\{\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ – единичный вектор, направленный вдоль касательной. Найдем векторы

$$\operatorname{grad} f = \{f'_x, f'_y\} = \left\{-\frac{2(16-y^2)}{x^3}, -\frac{2y}{x^2}\right\}, \ \operatorname{grad} f(M_0) = \{-1; -\sqrt{3}\}.$$

Тогда $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \tau} = \operatorname{grad} f(M_0) \cdot \vec{\tau}_0 = \{-1; -\sqrt{3}\} \cdot \left\{\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right\} = 0$, то есть поле по направлению касательной к линии $x^2 + y^2 = 16$ в точке M_0 не меняется.

По свойству 4) направляющий вектор $\vec{n}$ нормали к линии $x^2 + y^2 = 16$ в точке M_0 равен $\operatorname{grad} f(M_0)$, а по свойству 3) $\frac{\partial f(M_0)}{\partial n} = |\operatorname{grad} f(M_0)| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, причем это есть максимальная скорость возрастания поля в точке M_0.

Пример 3.2. Найти точки, в которых поле $u(M) = x^2 + y^2 + zy$ по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ не изменяется.

Решение. Поле $u = f(M)$ в точке M не изменяется по направлению $\vec{l}$, если $\frac{\partial u(M)}{\partial l} = 0$. Вычислим $\frac{\partial u(M)}{\partial a} = \operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{a}_0$:

$$\operatorname{grad} u(M) = \{2x, 2y + z, y\}, \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial a} = \operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{a}_0 = 2x \cdot \frac{1}{3} + (2y + z) \cdot \frac{2}{3} + y \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x + 3y + z).$$

Итак, в точках плоскости $x + 3y + z = 0$ производная $\frac{\partial u(M)}{\partial a}$ равна нулю, т.е. поле $u(M) = x^2 + y^2 + zy$ по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ не изменяется.

Пример 3.3. Показать, что линии уровня полей $u = 2x^2 + y^2$ и $v = \frac{y^2}{x}$ ортогональны.

Решение. Угол между линиями измеряется углом между касательными к этим линиям в точке пересечения. Угол между касательными совпадает с углом между нормалями (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Так как $\operatorname{grad} f(M)$ направлен по нормали к линии уровня, то угол между линиями уровня полей $u(M)$, $v(M)$ есть угол между $\operatorname{grad} u(M_0) = \{4x_0, 2y_0\}$ и $\operatorname{grad} v(M_0) = \left\{-\frac{y_0^2}{x_0^2}, \frac{2y_0}{x_0}\right\}$, где $M_0(x_0, y_0)$ – точка пересечения линий уровня.

Вычислим скалярное произведение градиентов:

$$(\operatorname{grad} u(M_0), \operatorname{grad} v(M_0)) = -4x_0 \cdot \frac{y_0^2}{x_0^2} + 4 \cdot \frac{y_0^2}{x_0} = 0,$$

т.е. $\operatorname{grad} u(M_0) \perp \operatorname{grad} v(M_0)$ и линии уровня полей $u(M)$, $v(M)$ ортогональны.

Пример 3.4. Найти наибольшую скорость изменения поля $u = \ln^2 r$, где $r = |\vec{r}|$.

*Решение. Н*аибольшая скорость изменения поля u равна $|\operatorname{grad} u|$. По свойствам градиента имеем:

$$\operatorname{grad} u(r) = u'_r \cdot \operatorname{grad} r = u'_r \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \left(\ln^2 r\right)' \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 2\ln r \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \frac{2\ln r}{r}.$$

Пример 3.5. Доказать, что $\operatorname{grad}(\vec{r}, \vec{a}) = \vec{a}$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Решение. Вычислим скалярное произведение векторов

$$\vec{r} = \{x, y, z\}, \ \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}: \quad u = (\vec{r}, \vec{a}) = a_1 x + a_2 y + a_3 z.$$

Тогда $\operatorname{grad} u = \{u'_x, u'_y, u'_z\} = \{a_1, a_2, a_3\} = \vec{a}$.

Пример 3.6. Найти $\operatorname{grad}\left((\vec{a}, \vec{r})(\vec{c}, \vec{r})\right)$, где $\vec{a}$, $\vec{c}$ – постоянные векторы, $\vec{r}$ – радиус-вектор.

Решение. По свойствам градиента

$$\operatorname{grad}\left((\vec{a}, \vec{r})(\vec{c}, \vec{r})\right) = (\vec{c}, \vec{r}) \underbrace{\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{r})}_{=\vec{a}} + (\vec{a}, \vec{r}) \underbrace{\operatorname{grad}(\vec{c}, \vec{r})}_{=\vec{c}} = (\vec{c}, \vec{r})\vec{a} + (\vec{a}, \vec{r})\vec{c}.$$

4. Векторное поле

4.1. Векторные линии векторного поля

Одной из характеристик векторного поля являются ***векторные линии***.

> ***Векторной линией*** векторного поля называют линию, в каждой точке которой касательный вектор коллинеарен вектору поля (рис.45).

Для векторного поля $\vec{a} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ векторные линии отыскиваются из системы дифференциальных уравнений

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}}.$$

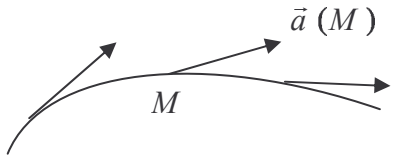

Рис. 45

При решении таких уравнений бывает полезно использовать следующее свойство пропорций:

$$\boxed{\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}}.$$

Пример 4.1. Найти векторные линии поля вектора

$$\vec{a} = (z - y) \cdot \vec{i} + (x - z) \cdot \vec{j} + (y - x) \cdot \vec{k}.$$

Решение. Запишем дифференциальные уравнения векторных линий этого поля:

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

Учитывая свойство пропорций, домножим числитель и знаменатель первой дроби на x, второй – на y, третьей – на z и, сложив почленно, получим

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(xz - xy) + (xy - zy) + (yz - xz)} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}.$$

Отсюда $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$, $\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$ или $x^2+y^2+z^2=C_1^2$.

Теперь запишем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\underbrace{\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy}{-y+x}}\Rightarrow\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy}{-y+x}\Rightarrow -dz=dx+dy\Rightarrow -z+C_2=x+y.$$

Таким образом, векторные линии данного поля есть линии пересечения сфер $x^2+y^2+z^2=C_1^2$ с плоскостями $x+y+z=C_2$.

Пример 4.2. Найти векторные линии поля градиентов функции

$$f(M)=xy+x^2+y^2+z.$$

Решение. Найдем градиент скалярного поля функции $f(M)$:

$$grad\ f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}=\{2x+y,2y+x,1\}.$$

Запишем дифференциальные уравнения векторных линий поля градиентов:

$$\frac{dx}{2x+y}=\frac{dy}{2y+x}=\frac{dz}{1}.$$

Используя свойство пропорций, имеем $\frac{dz}{1}=\frac{dx-dy}{x-y}$ и $\frac{dz}{1}=\frac{dx+dy}{3(x+y)}$.

Проинтегрируем оба равенства:

$$\int\frac{d(x-y)}{x-y}=\int dz,\quad \ln|x-y|=z+C_1,\quad \ln|x-y|-z=C_1,$$

$$\int\frac{d(x+y)}{x+y}=3\int dz,\quad \ln|x+y|=3z+C_2,\quad \ln|x+y|-3z=C_2.$$

Таким образом, векторные линии есть линии пересечения поверхностей

$$\begin{cases}\ln|x-y|-z=C_1,\\ \ln|x+y|-3z=C_2.\end{cases}$$

Пример 4.3. Найти векторную линию поля $\vec{a}=\left(x+y^2+z^2\right)\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$, проходящую через точку $M(1,-1,1)$.

Решение. Запишем систему дифференциальных уравнений для отыскания векторных линий: $\frac{dx}{x+y^2+z^2}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. Проинтегрировав дифференциальное уравнение $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$, получим $\ln|y|=\ln|z|+\ln C_1$ или $y=C_1z$.

Применив свойство пропорций, запишем систему в виде:

$$\frac{dx}{x+y^2+z^2}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{dx-2y\,dy-2z\,dz}{\left(x+y^2+z^2\right)-2y^2-2z^2}\ \text{или}\ \frac{dy}{y}=\frac{d\left(x-y^2-z^2\right)}{x-y^2-z^2}.$$

Проинтегрировав полученное равенство, получим

$$\ln|y|=\ln\left|x-y^2-z^2\right|+\ln C_2\ \text{или}\ y=C_2\left(x-y^2-z^2\right).$$

Тогда векторные линии данного поля есть линии пересечения поверхностей

$$\begin{cases} y = C_1 z, \\ y = C_2\left(x - y^2 - z^2\right). \end{cases}$$

Выделим векторную линию, проходящую через точку $M(1, -1, 1)$. Для этого подставим координаты точки в полученные уравнения поверхностей:

$$\begin{cases} -1 = C_1 \cdot 1, \\ -1 = C_2(1-1-1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Итак, уравнение искомой векторной линии $\begin{cases} y = -z, \\ y = x - y^2 - z^2. \end{cases}$

4.2. Поток векторного поля и его вычисление

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность (σ) с единичным нормальным вектором $\vec{n}$ называют величину

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma.$$

Отметим, что при изменении ориентации поверхности вектор $\vec{n}$ заменяется на вектор $(-\vec{n})$ и, следовательно, поток меняет знак.

Употребительны и другие формы записи потока поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$:

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\, \overrightarrow{d\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} P\, d\sigma_{yz} + Q\, d\sigma_{xz} + R\, d\sigma_{xy}.$$

Рассмотрим несколько способов вычисления потока.

1). Вычисление потока по формуле $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma$.

При использовании этой формулы надо вычислить $\vec{a} \cdot \vec{n}$ и $d\sigma$; например, $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$ для поверхности с уравнением $z = z(x, y)$.

Пример 4.4. Вычислить поток вектора $\vec{a} = 3\vec{j}$ через площадку, имеющую форму треугольника с вершинами в точках $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 2, 2)$, по направлению нормали, направленной в сторону начала координат.

Решение. Поверхность (σ) – треугольник $M_1M_2M_3$, лежащий в плоскости $y = 2$ (рис. 46). Единичный вектор нормали $\vec{n} = -\vec{j}$, поэтому $\vec{a} \cdot \vec{n} = 3 \cdot (-1) = -3$. Учитывая, что площадь треугольника $M_1M_2M_3$ равна 1, получим

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (-3)\, d\sigma = -3 \int\limits_{(\sigma)} d\sigma = -3 \cdot S_\Delta = -3.$$

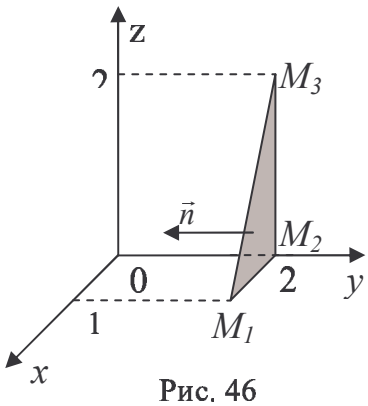

Рис. 46

Пример 4.5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + (y + z) \cdot \vec{j} + (z - y) \cdot \vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенной в первом октанте $(x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0)$.

Решение. Нормальный вектор к сфере коллинеарен радиус-вектору $\vec{r}$ (рис. 47) и $|\vec{r}| = R$; тогда $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{R}\cdot\vec{r} = \frac{1}{R}\cdot\{x,\ y,\ z\}$.

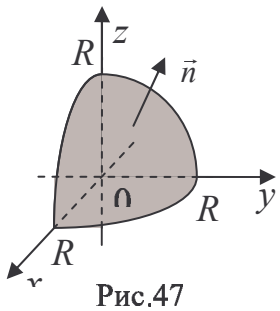

Рис.47

Вычислим $\vec{a}\cdot\vec{n}$ на поверхности сферы:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}\big|_{\sigma} = \frac{1}{R}\Big(x^2 + y\cdot(y+z) + z\cdot(z-y)\Big)\Big|_{\sigma} = \frac{1}{R}\Big(x^2+y^2+z^2\Big)\Big|_{\sigma} = \frac{1}{R}\cdot R^2 = R.$$

Тогда

$$\Pi_{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\cdot\vec{n}\ d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} R\cdot d\sigma = R\int\limits_{(\sigma)} d\sigma = R\cdot\sigma = R\cdot\frac{1}{8}S_{\text{сферы}} = R\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi R^3}{2}.$$

Пример 4.6. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (x+z)\cdot\vec{i} - 2x\cdot\vec{j} + (2z-x)\cdot\vec{k}$ через плоский треугольник, отсекаемый от плоскости $6x+2y-3z=6$ координатными плоскостями в положительном направлении оси OZ.

Решение. Нормальный вектор $\vec{N}$ плоскости $6x+2y-3z=6$ равен $\vec{N} = \{6,2,-3\}$, единичный вектор $\vec{n} = \pm\frac{\{6,2,-3\}}{\sqrt{36+4+9}} = \pm\frac{1}{7}\{6,2,-3\}$. Так как вектор $\vec{n}$ по условию задачи составляет с осью OZ острый угол, то третья координата вектора должна быть больше нуля, следовательно, $\vec{n} = -\frac{1}{7}\{6,2,-3\}$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = -\frac{1}{7}\Big[6\cdot(x+z) + 2\cdot(-2x) - 3\cdot(2z-x)\Big] = -\frac{5}{7}x \quad \text{и} \quad \Pi_{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)}\left(-\frac{5}{7}x\right)d\sigma.$$

Для вычисления поверхностного интеграла найдем $d\sigma$; для этого выразим переменную z из уравнения плоскости: $z = 2x + \frac{2}{3}y - 2$. Тогда

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\ dxdy = \sqrt{1 + 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}\ dxdy = \frac{7}{3}\,dx\,dy.$$

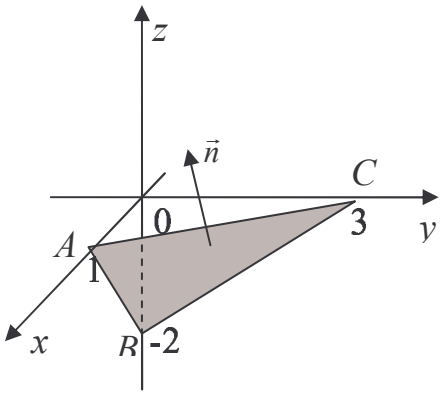

Рис. 48

Проекция треугольника ABC на плоскость (XOY) есть треугольник AOC (рис. 48). Таким образом,

$$\Pi_{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{XY})}\left(-\frac{5}{7}x\right)\cdot\frac{7}{3}dx\,dy = -\frac{5}{3}\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{3(1-x)} dy =$$

$$= -\frac{5}{3}\cdot\int\limits_0^1 3x(1-x)\,dx = -5\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{6}.$$

2). Вычисление потока методом проектирования на три плоскости

Воспользуемся формулой $\Pi_{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy}$ и рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz},\quad I_2 = \int\limits_{(\sigma)} Q\,d\sigma_{xz},\quad I_3 = \int\limits_{(\sigma)} R\,d\sigma_{xy}.$$

Для вычисления интеграла $I_1 = \int\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)\,d\sigma_{yz}$ следует

а) в подынтегральной функции заменить x его значением $x = x(y,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{yz} = \text{пр}_{yoz}\,d\sigma$ и поэтому $d\sigma_{yz} = \begin{cases} +dy\,dz, & \widehat{(\vec{n},ox)} < \pi/2, \\ -dy\,dz, & \widehat{(\vec{n},ox)} > \pi/2, \\ 0, & \widehat{(\vec{n},ox)} = \pi/2, \end{cases}$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{yz}).

Для вычисления интеграла $I_2 = \int\limits_{(\sigma)} Q\,d\sigma_{xz}$ следует

а) в подынтегральной функции заменить y его значением $y = y(x,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{xz} = \text{пр}_{xoz}\,d\sigma$ и поэтому $d\sigma_{xz} = \begin{cases} +dx\,dz, & \widehat{(\vec{n},oy)} < \pi/2, \\ -dx\,dz, & \widehat{(\vec{n},oy)} > \pi/2, \\ 0, & \widehat{(\vec{n},oy)} = \pi/2 \end{cases}$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{xz}).

Аналогично вычисляется интеграл I_3.

Пример 4.7. Вычислить поток поля $\vec{a} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \cdot \vec{j} + xz^3 \cdot \vec{k}$ через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 16$, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Решение. Для вычисления потока воспользуемся формулой

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(\sigma)} x^3\,d\sigma_{yz} - y^3\,d\sigma_{xz} + xz^3\,d\sigma_{xy} = I_1 - I_2 + I_3$$

1). Сведем интеграл $I_1 = \int\limits_{(\sigma)} x^3\,d\sigma_{yz}$ к двойному интегралу.

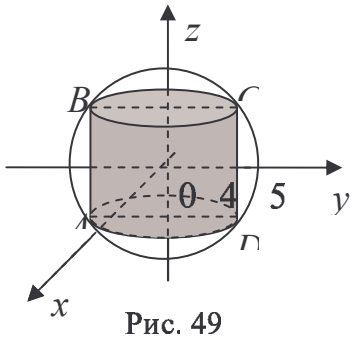

Рис. 49

На части (σ_1) цилиндра, где $x = +\sqrt{16 - y^2}$, имеем:

$$\widehat{(\vec{n},ox)} < \pi/2,\ d\sigma_{yz} = +dy\,dz;$$

на части (σ_2) цилиндра, где $x = -\sqrt{16 - y^2}$, имеем:

$$\widehat{(\vec{n},ox)} > \pi/2,\ d\sigma_{yz} = -dy\,dz;$$

$$I_1 = \int\limits_{(\sigma_1)} x^3\,d\sigma_{yz} + \int\limits_{(\sigma_2)} x^3\,d\sigma_{yz} = \iint\limits_{(\sigma_{yz})} \left(\sqrt{16 - y^2}\right)^3 dydz - \iint\limits_{(\sigma_{yz})} \left(-\sqrt{16 - y^2}\right)^3 dydz = 2\iint\limits_{(\sigma_{yz})} \left(\sqrt{16 - y^2}\right)^3 dydz.$$

2). Сведем интеграл $I_2 = \int\limits_{(\sigma)} y^3\,d\sigma_{xz}$ к двойному интегралу.

На части (σ_3) цилиндра, где $y = +\sqrt{16 - x^2}$, имеем: $\widehat{(\vec{n},oy)} < \pi/2$, $d\sigma_{xz} = +dx\,dz$;

на части (σ_4) цилиндра, где $y = -\sqrt{16 - x^2}$, имеем: $\widehat{(\vec{n},oy)} > \pi/2$, $d\sigma_{xz} = -dx\,dz$;

$$I_2=\int\limits_{(\sigma_3)} y^3 d\sigma_{xz}+\int\limits_{(\sigma_4)} y^3 d\sigma_{xz}=\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\left(\sqrt{16-x^2}\right)^3 dxdz-\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\left(-\sqrt{16-x^2}\right)^3 dxdz=2\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\left(\sqrt{16-x^2}\right)^3 dxdz.$$

Проекция (σ_{yz}) есть прямоугольник *ABCD*, проекция (σ_{xz}) есть такой же прямоугольник, но в плоскости XOZ, подынтегральные функции в интегралах $I_1,\ I_2$ равны между собой, поэтому $I_1=I_2,\ \ I_1-I_2=0$.

3). Вычислим интеграл $I_3=\int\limits_{(\sigma)} xz^3\, d\sigma_{xy}$.

Так как на поверхности цилиндра $\left(\widehat{\vec{n},oz}\right)=\pi/2$, то $d\sigma_{xy}=0$ и поэтому $I_3=0$. В результате $\Pi_\sigma=I_1-I_2+I_3=0$.

Пример 4.8. Вычислить поток поля $\vec{a}=(y+3)\,\vec{i}+(3-z)\,\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z=3-\sqrt{x^2+y^2}$, лежащей в четвертом октанте.

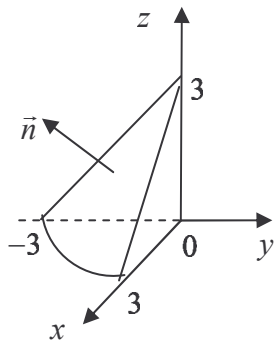

Рис. 50

Решение. Построим поверхность методом сечений (рис.50), учитывая, что в четвертом октанте $x\ge 0,\ \ y\le 0,\ \ z\ge 0$:

$$\begin{cases}x=0,\\ z=3-|y|=3+y,\end{cases}\quad \begin{cases}y=0,\\ z=3-|x|=3-x,\end{cases}\quad \begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2=3^2.\end{cases}$$

Для вычисления потока поля $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ через поверхность (σ) воспользуемся формулой

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz}+Q\,d\sigma_{xz}+R\,d\sigma_{xy}=\int\limits_{(\sigma)}(y+3)\,d\sigma_{yz}+\int\limits_{(\sigma)}(3-z)\,d\sigma_{xy}=I_1+I_2.$$

1). Вычислим интеграл $I_1=\int\limits_{(\sigma)}(y+3)\,d\sigma_{yz}$.

Так как на поверхности $\left(\widehat{\vec{n},ox}\right)<\pi/2$, то $d\sigma_{yz}=+dy\,dz$ и

$$I_1=\iint\limits_{(\sigma_{yz})}(y+3)\,dy\,dz=\int\limits_{-3}^{0}(y+3)\,dy\int\limits_{0}^{3+y}dz=\int\limits_{-3}^{0}(y+3)^2\,dy=\left.\frac{(y+3)^3}{3}\right|_{-3}^{0}=9.$$

2). Вычислим интеграл $I_2=\int\limits_{(\sigma)}(3-z)\,d\sigma_{xy}$.

На поверхности $3-z=\sqrt{x^2+y^2}$; $\left(\widehat{\vec{n},oz}\right)<\pi/2$, поэтому $d\sigma_{xy}=+dx\,dy$. Тогда

$$I_2=\int\limits_{(\sigma)}(3-z)\,d\sigma_{xy}=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Так как (σ_{xy}) есть часть круга $(0\le\rho\le 3,\ \ 3\pi/2\le\varphi\le 2\pi)$, то двойной интеграл вычислим в полярной системе координат:

$$I_2=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{3}\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\cdot 9.$$

В результате $\Pi_\sigma=I_1+I_2=9+\dfrac{9\pi}{2}$.

3). Вычисление потока методом проектирования на одну плоскость

Для вычисления потока воспользуемся формулой $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma$ и параметрическим уравнением поверхности (σ): $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in (S)$. Тогда

$$\boxed{\begin{aligned} &\Pi_\sigma = +\iint\limits_{(S)} \vec{a}\cdot\left(\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'\right) du\, dv, \ \text{ если } \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \uparrow\uparrow \vec{n};\\ &\Pi_\sigma = -\iint\limits_{(S)} \vec{a}\cdot\left(\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'\right) du\, dv, \ \text{ если } \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \uparrow\downarrow \vec{n}. \end{aligned}}$$

Пример 4.9. Найти поток поля вектора $\vec{a} = y^3\cdot\vec{i} + x\,y^2\cdot\vec{j} + (2z - xy)\cdot\vec{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, отсеченной плоскостями $z = 1$, $z = 4$ в направлении внешней нормали (рис. 51).

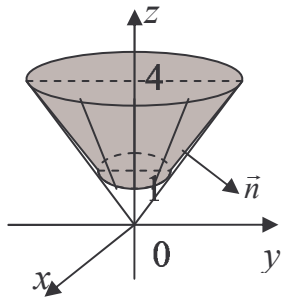

Рис. 51

Решение. Запишем параметрические уравнения поверхности (σ):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = \rho \quad (\rho,\ \varphi - \text{ параметры}).$$

Вычислим вектор

$$\vec{r}'_\rho \times \vec{r}'_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\rho\cos\varphi\ \vec{i} - \rho\sin\varphi\ \vec{j} + \rho\ \vec{k}\,.$$

Третья координата этого вектора $\rho > 0$, поэтому этот вектор образует с осью OZ острый угол; значит, $\vec{r}'_\rho \times \vec{r}'_\varphi \uparrow\downarrow \vec{n}$ и $\Pi_\sigma = -\iint\limits_{(S)} \vec{a}\cdot\left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) d\rho\, d\varphi$, где

$\vec{a} = \left\{\rho^3\sin^3\varphi,\ \rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ 2\rho - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right\}$, $\vec{r}'_\rho \times \vec{r}'_\varphi = \{-\rho\cos\varphi,\ -\rho\sin\varphi,\ \rho\ \}$. Тогда

$$\Pi_\sigma = -\iint\limits_{(S)} \vec{a}\cdot\left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) d\rho\, d\varphi = -\iint\limits_{(S)} \left[-2\rho^4\sin^3\varphi\cos\varphi + 2\rho^2 - \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\right] d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{2\sin^3\varphi\cos\varphi}_{\text{нечетная}}\, d\varphi \int\limits_1^4 \rho^4 d\rho + \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_1^4 2\rho^2 d\rho - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{\text{нечетная}}\, d\varphi \int\limits_1^4 \rho^3 d\rho = 0 + 2\pi\cdot\frac{64-1}{3} + 0 = 84\pi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что интеграл по промежутку $[-\pi,\ \pi]$ от нечетной функции равен нулю.

4). Вычисление потока с использованием формулы Остроградского

В случае ***замкнутой*** поверхности поток векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ удобно вычислять по ***формуле Остроградского*** с помощью дивергенции $\operatorname{div}\vec{a}$ поля:

$$\boxed{\Pi_\sigma = \oint\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV, \ \text{ где } \operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}\ ;$$

(V) – тело, ограниченное замкнутой поверхностью (σ), причём поверхность (σ) ориентирована внешней нормалью.

Пример 4.10. Найти поток поля вектора $\vec{a} = \left(3z^2 + x\right)\cdot\vec{i} + \left(e^x - 2y\right)\cdot\vec{j} + (2z - xy)\cdot\vec{k}$ через <u>замкнутую</u> поверхность (σ): $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 4$ (рис. 51).

Решение. Вычислим $div\vec{a} = 1 - 2 + 2 = 1$.

Тогда $\Pi_\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = \int\limits_{(V)} dV = V$, где V – объём усеченного конуса;

$V = \frac{1}{3}\pi\left(R_1^{\,2}\cdot h_1 - R_2^{\,2}\cdot h_2\right) = \frac{1}{3}\pi\left(4^2\cdot 4 - 1^2\cdot 1\right) = 21\pi$, то есть $\Pi_\sigma = 21\pi$.

Пример 4.11. Найти поток поля вектора $\vec{a} = xz\cdot\vec{i} - \vec{j} + y\cdot\vec{k}$ через <u>замкнутую</u> поверхность (σ): $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 1$, $z = y$, $z = 0$, $(x \ge 0)$, в направлении нормали, направленной внутрь тела.

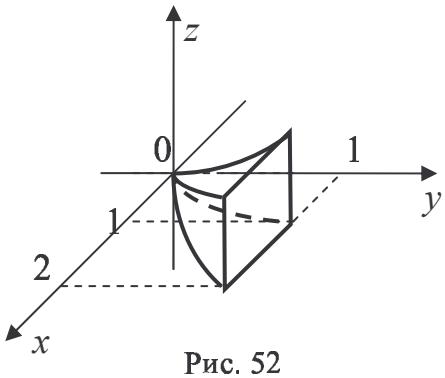

Рис. 52

Решение. В формуле Остроградского поверхность (σ) ориентирована внешней нормалью. Поток в направлении внутренней нормали будет равен значению потока, вычисленного по формуле Остроградского, с противоположным знаком. Поэтому

$$\Pi_\sigma = -\int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = -\iiint\limits_{(V)} z\, dx\, dy\, dz.$$

Для вычисления тройного интеграла построим поверхности, ограничивающие тело (V). Сверху тело ограничено плоскостью $z = y$ (рис. 52), снизу – плоскостью $z = 0$, сбоку – цилиндрическими поверхностями $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 1$. Рассмотрим проекцию тела (V) на плоскость (XOY) (рис. 53). Справа и слева фигура ограничена линиями $x = 2\sqrt{y}$, $x = \sqrt{y}$, $0 \le y \le 1$. Поэтому

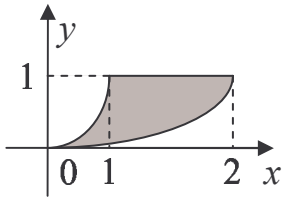

Рис. 53

$$\Pi_\sigma = -\iiint\limits_{(V)} z\, dx\, dy\, dz = -\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dx \int\limits_0^y z\, dz = -\int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\, dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\cdot\sqrt{y}\, dy = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot y^{7/2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{7}.$$

Пример 4.12. Вычислить поток поля $\vec{a} = 3x\cdot\vec{i} - 7y\cdot\vec{j} + 5z\cdot\vec{k}$ через боковую поверхность тела, ограниченного поверхностями $9 - z = x^2 + y^2$, $z = 0$, в направлении внешней нормали.

Решение. Построим поверхность методом сечений (рис. 54):

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 9 - y^2 \end{cases} (\text{парабола}), \qquad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases} (\text{окружность}).$$

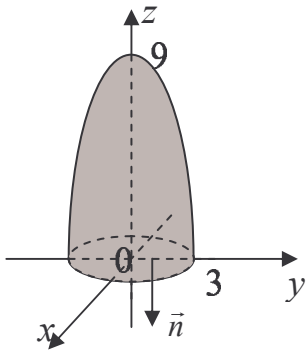

Рис. 54

Воспользоваться формулой Остроградского нельзя, так как боковая поверхность незамкнута, поэтому вычислим поток через боковую поверхность тела по формуле $\Pi_{\text{бок}} = \Pi_{\text{полн}} - \Pi_{\text{осн}}$, где $\Pi_{\text{полн}}$ – поток через замкнутую поверхность, $\Pi_{\text{осн}}$ – поток через основание тела в направлении внешней нормали.

$$\Pi_{\text{полн}} = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = \int\limits_{(V)} (3 - 7 + 5)\, dV = \int\limits_{(V)} dV.$$

Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрической системе координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, $dv=\rho\cdot d\rho\, d\varphi\, dz$.

Уравнение поверхности примет вид $z=9-\rho^2$. Проекцией тела на плоскость (XOY) является круг $x^2+y^2\le 9$ или $0\le\rho\le 3$. Тогда

$$\Pi_{\text{полн}}=\int\limits_{(V)} dv=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 \rho\, d\rho\int\limits_0^{9-\rho^2} dz=2\pi\cdot\int\limits_0^3 \rho\left(9-\rho^2\right)d\rho=2\pi\cdot\frac{81}{4}=\frac{81\pi}{2}.$$

Найдем поток через плоскость основания $z=0$ в направлении внешней нормали:

$$\vec{n}=-\vec{k},\ \vec{a}\cdot\vec{n}\Big|_{\sigma}=-\vec{a}\cdot\vec{k}\Big|_{\sigma}=-5z\big|_{z=0}=0,\quad \Pi_{\text{осн}}=\int\limits_{(\sigma)} 0\cdot d\sigma=0.$$

Тогда $\Pi_{\text{бок}}=\Pi_{\text{полн}}-\Pi_{\text{осн}}=81\pi/2$.

Пример 4.13. Вычислить поток поля $\vec{a}=2\cdot\vec{i}+y^2\cdot\vec{j}-(x+y)^2\cdot\vec{k}$ через боковую поверхность тела, расположенного в IV октанте и ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=5.$$

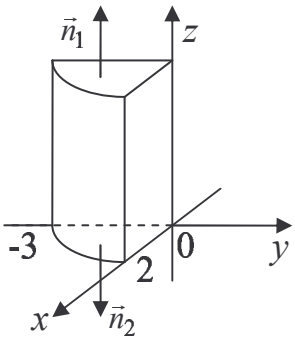

Рис. 55

Решение. Воспользуемся формулой $\Pi_{\text{бок}}=\Pi_{\text{полн}}-\Pi_{\text{осн}}$.

Сначала вычислим поток через замкнутую поверхность тела по формуле Остроградского: $\Pi_{\text{полн}}=\int\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{a}\,dV=\int\limits_{(V)}2y\,dV$.

Так как проекцией тела на плоскость (XOY) является часть плоскости, ограниченная эллипсом (рис. 55), то для вычисления тройного интеграла перейдем к обобщенной цилиндрической системе координат: $x=2\rho\cos\varphi$, $y=3\rho\sin\varphi$, $z=z$. Тогда $dV=6\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, а уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{4\rho^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{9\rho^2\sin^2\varphi}{9}=1\ \Rightarrow\ \rho^2=1 \text{ или } \rho=1,\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0.$$

$$\Pi_{\text{полн}}=\int\limits_{(V)}2y\,dV=\iiint\limits_{(V)}2\cdot 3\rho\sin\varphi\cdot 6\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz=36\int\limits_{-\pi/2}^{0}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\, d\rho\int\limits_0^5 dz=$$

$$=36\cdot 5\int\limits_{-\pi/2}^{0}\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\, d\rho=36\cdot 5\cdot\left(-\cos\varphi\Big|_{-\pi/2}^{0}\right)\cdot\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\right)=-60.$$

Вычислим поток поля через основания (σ_1), (σ_2): $\Pi_{осн}=\Pi_{\sigma_1}+\Pi_{\sigma_2}$.

Основание (σ_1) задано уравнением $z=5$ (рис. 55), единичный вектор нормали $\overrightarrow{n_1}=\vec{k}$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{n}\Big|_{\sigma_1}=\vec{a}\cdot\vec{k}\Big|_{\sigma_1}=-(x+y)^2\Big|_{z=5}=-(x+y)^2$ и

$$\Pi_{\sigma_1}=\int\limits_{(\sigma_1)}\vec{a}\cdot\overrightarrow{n_1}\, d\sigma_1=-\iint\limits_{(\sigma_{XY})}(x+y)^2\, dx\, dy.$$

Основание (σ_2) задано уравнением $z=0$, единичный вектор нормали $\overrightarrow{n_2}=-\vec{k}$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{n}\Big|_{\sigma_2}=-\vec{a}\cdot\vec{k}\Big|_{\sigma_2}=(x+y)^2\Big|_{z=0}=(x+y)^2$ и

$$\Pi_{\sigma_2} = \int\limits_{(\sigma_2)} \vec{a} \cdot \overrightarrow{n_2}\, d\sigma_2 = \iint\limits_{(\sigma_{XY})} (x+y)^2\, dx\, dy = -\Pi_{\sigma_1}.$$

Таким образом, $\Pi_{\text{осн}} = \Pi_{\sigma_1} + \Pi_{\sigma_2} = 0$ и $\Pi_{\text{бок}} = \Pi_{\text{полн}} - \Pi_{\text{осн}} = -60$.

4.3. Линейный интеграл векторного поля

Линейным интегралом поля $\vec{a}$ по дуге BC называют интеграл $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$.

Выразив скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ через их координаты, получим

$$\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

1). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по линии BC, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, следует:

а) записать интеграл в координатной форме

$$\int\limits_{\cup BC} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

б) заменить x, y, z в функциях P, Q, R соответственно на $x(t), y(t), z(t)$,

в) заменить dx, dy, dz соответственно на $x'(t)\, dt,\ y'(t)\, dt,\ z'(t)\, dt$,

г) найти интервал изменения параметра t и вычислить получившийся определенный интеграл по этому интервалу.

2). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по плоской линии BC с уравнением $y = y(x)$, $x \in [b, c]$ следует:

а) записать интеграл в координатной форме $\int\limits_{\cup BC} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$,

б) заменить y в функциях P, Q на $y(x)$,

в) заменить dy на $y'(x)\, dx$,

г) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[b, c]$.

3). В случае центрального поля $\vec{a} = f(r)\, \vec{r}$

$$\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} f(r)\, \vec{r}\, d\vec{r} = \int\limits_{r_B}^{r_C} f(r)\, r\, dr.$$

Пример 4.14. Вычислить линейный интеграл поля $\vec{a} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$ вдоль части астроиды $\vec{r}(t) = 4\cos^3 t \cdot \vec{i} + 4\sin^3 t \cdot \vec{j}$, лежащей в первой четверти (рис. 56).

Решение. Найдем значения параметра t, соответствующие точкам A и B:

т. A: $\begin{cases} x = 4\cos^3 t = 4, \\ y = 4\sin^3 t = 0, \end{cases} \Rightarrow t_A = 0;$ т. B: $\begin{cases} x = 4\cos^3 t = 0, \\ y = 4\sin^3 t = 4, \end{cases} \Rightarrow t_B = \pi/2.$

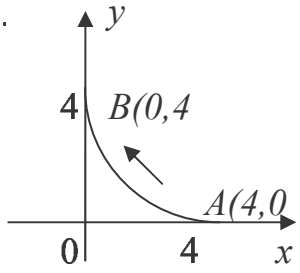

Рис. 56

Линейный интеграл запишем в координатной форме

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} y\,dx - x\,dy$$

и подставляя $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, & dx = -12\cos^2 t\cdot\sin t\ dt, \\ y = 4\sin^3 t, & dy = 12\cos t\cdot\sin^2 t\ dt, \end{cases}$ получим:

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} \left(-48\sin^4 t\cdot\cos^2 t - 48\cos^4 t\cdot\sin^2 t\right)dt == -48\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt =$$

$$= -12\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = -6\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = -6\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -3\pi.$$

Пример 4.15. Вычислить линейный интеграл векторного поля $\vec{a} = \left(x^2 - 2xy\right)\cdot\vec{i} + \left(y^2 - 2xy\right)\cdot\vec{j}$ вдоль параболы $y = x^2,\quad x\in[-1,1]$.

Решение. Линейный интеграл запишем в координатной форме

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{(\cup AB)} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy.$$

и подставим $y = x^2,\quad dy = 2x\,dx$. Тогда

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{(\cup AB)} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x^3\right)dx + \left(x^4 - 2x^3\right)\cdot 2x\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4\right)dx = 2\int\limits_0^1 \left(x^2 - 4x^4\right)dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{14}{15}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что интеграл от нечетной функции $\left(-2x^3 + 2x^5\right)$ по отрезку $[-1,1]$ равен нулю, а от четной функции $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

Пример 4.16. Вычислить работу силы $\vec{F} = \left(y^2 - z^2\right)\cdot\vec{i} + \left(z^2 - x^2\right)\cdot\vec{j} + \left(x^2 - y^2\right)\cdot\vec{k}$ при перемещении единичной массы по контуру, образованному линией пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с координатными плоскостями $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, в положительном направлении обхода контура.

Решение. Работу поля вычислим по формуле

$$A = \int\limits_{(L)} \vec{F}\ \vec{dr} = \int\limits_{(L)} \left(y^2 - z^2\right)dx + \left(z^2 - x^2\right)dy + \left(x^2 - y^2\right)dz.$$

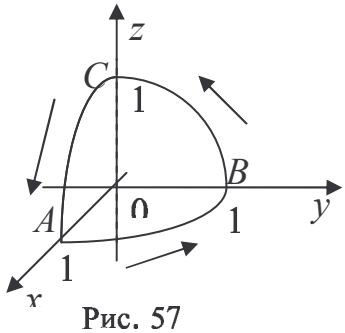

Рис. 57

Контур (L) состоит из дуг окружностей единичного радиуса с центром в начале координат, расположенных в координатных плоскостях $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (рис. 57).

По свойству аддитивности

$$\int\limits_{(L)} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_{\cup AB} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} + \int\limits_{\cup BC} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} + \int\limits_{\cup CA} \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}.$$

Рассмотрим каждый из интегралов.

Так как дуга AB имеет уравнение $z=0,\quad x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, то

$$dx=-\sin t\,dt,\quad dy=\cos t\,dt,\quad dz=0;$$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=y^2\,dx-x^2dy=\left(-\sin^3 t-\cos^3 t\right)dt;\qquad \int\limits_{\cup AB}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=-\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)d\,t.$$

Аналогично, для дуги BC: $x=0,\quad y=\cos t,\quad z=\sin t,\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$dx=0,\quad dy=-\sin t\,d\,t,\quad dz=\cos t\,d\,t;$$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=z^2dy-y^2dz=\left(-\sin^3 t-\cos^3 t\right)d\,t;\qquad \int\limits_{\cup BC}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=-\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)d\,t.$$

Для дуги CA: $y=0,\quad x=\cos t,\quad z=\sin t;\quad dy=0,\quad dx=-\sin t\,d\,t,\quad dz=\cos t\,d\,t;$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=-z^2dx+x^2dz=\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)d\,t,$$

$$\int\limits_{\cup CA}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=\int\limits_{\pi/2}^{0}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt=-\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{(L)}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=-3\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt=3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right)-3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right)=$$

$$=\left(3\cos t-\cos^3 t-3\sin t+\sin^3 t\right)\Big|_0^{\pi/2}=-4.$$

4.4. Циркуляция векторного поля

Линейный интеграл поля $\vec{a}$ ***по замкнутой кривой*** (L) называют ***циркуляцией*** поля $\vec{a}$ по кривой (L) и обозначают так:

$$\boxed{C(\vec{a},L)=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\,\vec{r}.}$$

Для вычисления циркуляции <u>плоского</u> поля $\vec{a}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ по границе (L) области (D) удобно использовать ***формулу Грина:***

$$\boxed{\oint\limits_{(L)}P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.}$$

Для вычисления циркуляции <u>пространственного</u> поля $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ по замкнутой кривой (L) удобно использовать ***формулу Стокса***:

$$\boxed{\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\,\vec{r}=\int\limits_{(\sigma)}\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\overrightarrow{d\sigma}\ ,\ \text{где}\ \operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.}$$

В этой формуле (σ) – произвольная поверхность, натянутая на кривую (L); ориентации контура (L) и поверхности (σ) согласованы, т. е., глядя с конца выбранных нормальных векторов поверхности (σ), обход контура (L) виден против часовой стрелки (рис. 58).

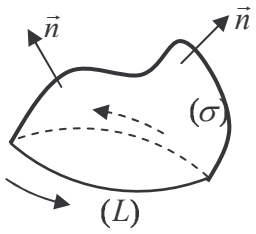

Рис. 58

Пример 4.17. Найти циркуляцию поля $\vec{a}=\left(y+x^5\right)\vec{i}+\left(3x+y^8\right)\vec{j}$ по границе области, изображенной на рис. 59.

Решение. Для вычисления циркуляции плоского поля по плоской кривой применим формулу Грина:

$$C=\int\limits_{(L)}\underbrace{\left(y+x^5\right)}_{=P}dx+\underbrace{\left(3x+y^8\right)}_{=Q}dy=\iint\limits_{(D)}\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy=\iint\limits_{(D)}(3-1)\,dx\,dy=2\,S.$$

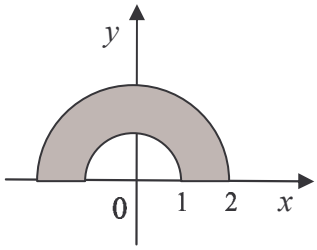

Рис. 59

Здесь S есть площадь полукольца, поэтому

$$C=2\,S=2\left(\frac{\pi R^2}{2}-\frac{\pi r^2}{2}\right)=4\pi-\pi=3\pi\,.$$

Отметим, что непосредственное вычисление циркуляции без формулы Грина в этом примере значительно сложнее.

Пример 4.18. Вычислить циркуляцию по контуру (L): $x^2+y^2=1$ поля

$$\vec{a}=\frac{\left(3x-y^3\sqrt{1+x^2+4y^3}\right)\vec{i}+\left(18y^2+x^3\sqrt{1+x^2+4y^3}\right)\vec{j}}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}.$$

Решение. Очевидно, что непосредственно вычислить циркуляцию, используя параметрические уравнения кривой, в данной задаче довольно затруднительно, поэтому, учитывая, что контур замкнутый, воспользуемся формулой Грина.
Так как $\vec{a}=P\cdot\vec{i}+Q\cdot\vec{j}$, то циркуляция

$$C(\vec{a})=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint\limits_{(L)}P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\,.$$

В нашем примере

$$P(x,\,y)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+4y^3}}-\frac{y^3}{3},\quad Q(x,\,y)=\frac{6y^2}{\sqrt{1+x^2+4y^3}}+\frac{x^3}{3};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{6xy^2}{\left(1+x^2+4y^3\right)^{3/2}}-y^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{6\,x\,y^2}{\left(1+x^2+4y^3\right)^{3/2}}+x^2\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2.$$

Таким образом,

$$C(\vec{a})=\iint\limits_{(D)}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,.$$

Так как (D) есть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$, то в двойном интеграле перейдем к полярной системе координат:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\ ds=\rho\ d\rho\ d\varphi,\quad \varphi\in[0,\,2\pi],\quad \rho\in[0,\,1].$$

Тогда $C(\vec{a})=\iint\limits_{(D)}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3d\rho=\frac{\pi}{2}$.

Пример 4.19. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = y^2\,\vec{i}$ по кривой, составленной из половины эллипса $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ и отрезка оси Oy (рис. 60).

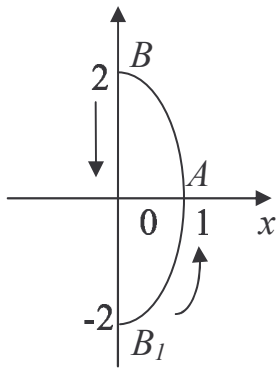

Рис. 60

Решение. Вычислим циркуляцию без формулы Грина:

$$C(\vec{a}, L) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\,\vec{r} = \int\limits_{(L_1)} \vec{a}\,d\,\vec{r} + \int\limits_{(L_2)} \vec{a}\,d\,\vec{r} = I_1 + I_2 .$$

На эллипсе B_1AB имеем: $\begin{cases} x = \cos t, & dx = -\sin t\,d\,t, \\ y = 2\sin t, & dy = 2\cos t\,d\,t, \end{cases}$ $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{(B_1AB)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{(B_1AB)} y^2 dx = -4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t\,dt = 0 \quad \text{(как интеграл от нечетной функции)}$$

На отрезке BB_1: $x = 0$, $dx = 0$. Поэтому $I_2 = \int\limits_{BB_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{BB_1} y^2 \underbrace{dx}_{=0} = 0$.

Значит, $C(\vec{a}, L) = I_1 + I_2 = 0$. Самостоятельно вычислите циркуляцию, используя формулу Грина.

Пример 4.20. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = x^2\,\vec{i} + z^2\,\vec{j}$ вдоль контура (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3y + 4z = 5 \end{cases}$ непосредственно и по формуле Стокса.

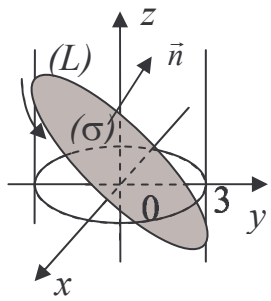

Рис. 61

Решение. Контур (L) – эллипс, получаемый при пересечении цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 9$ (рис. 61) с плоскостью $3y + 4z = 5$. По формуле Стокса циркуляция

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\;d\vec{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\;d\sigma ,$$

где (σ) – любая поверхность, натянутая на контур (L), например, поверхность (σ) – часть плоскости $3y + 4z = 5$, ограниченная эллипсом (L). Ориентация контура (L) и поверхности (σ) показана на рис. 61.

Вычислим ротор поля и нормальный вектор плоскости $3y + 4z = 5$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = -2z\cdot\vec{i}\,, \quad \vec{N} = \{0, 3, 4\}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Тогда $\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n} = \{-2z, 0, 0\}\cdot\left\{0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right\} = -2z\cdot 0 + 0\cdot\dfrac{3}{5} + 0\cdot\dfrac{4}{5} = 0$ и $C(\vec{a}) = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\;d\sigma = 0$.

Можно вычислить циркуляцию поля без формулы Стокса, задав линию (L) параметрически: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t \;\Rightarrow\; z = \dfrac{5 - 3y}{4} = \dfrac{5 - 9\sin t}{4}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда

$$C(\vec{a})=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}=\oint\limits_{(L)}x^2\,dx+z^2dy=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{9\cos^2 t\,(-3\sin t)}_{\text{нечетная}}dt+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{5-9\sin t}{4}\right)^2 3\cos t\,dt=$$

$$=0+\frac{3}{16}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(5-9\sin t)^2\,d(\sin t)=\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{(5-9\sin t)^3}{3}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Пример 4.21. Вычислить поток ротора поля $\vec{a}=y\,e^{xy}\,\vec{i}+x\,e^{xy}\,\vec{j}+x\,y\,z\,\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=(z-1)^2$, расположенную в первом октанте при $z\le 1$ в направлении нормали от начала координат.

Решение. Построим поверхность методом сечений, учитывая, что в первом октанте $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$:

$$\begin{cases}x=0,\\ y=|z-1|=1-z,\end{cases}\quad\begin{cases}y=0,\\ x=|z-1|=1-z,\end{cases}\quad\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}\quad\text{(рис.62).}$$

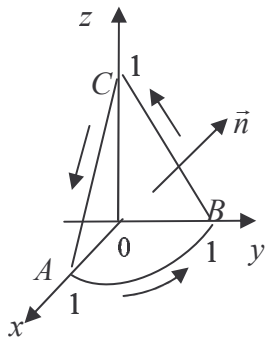

Рис. 62

Для вычисления потока поля $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхность (σ) воспользуемся формулой Стокса:

$$\Pi(\operatorname{rot}\vec{a})=\int\limits_{(\sigma)}\operatorname{rot}\vec{a}\;d\vec{\sigma}=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}\,.$$

Обход контура (L), согласованный с направлением нормального вектора $\vec{n}$, указан на рис. 62 стрелками. Контур (L) состоит из двух отрезков BC и CA и дуги окружности AB. Поэтому

$$\Pi(\operatorname{rot}\vec{a})=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{BC}\vec{a}\,d\vec{r}+\int\limits_{CA}\vec{a}\,d\vec{r}+\int\limits_{\cup AB}\vec{a}\,d\vec{r}=I_1+I_2+I_3\,.$$

На отрезке BC $x=0,\ dx=0$, поэтому $\vec{a}\,d\vec{r}=\{y,0,0\}\cdot\{0,dy,dz\}=0,\quad I_1=\int\limits_{BC}\vec{a}\,d\vec{r}=0$.

На отрезке CA $y=0,\ dy=0$, поэтому $\vec{a}\,d\vec{r}=\{0,x,0\}\cdot\{dx,0,dz\}=0,\quad I_2=\int\limits_{CA}\vec{a}\,d\vec{r}=0$.

На дуге окружности AB имеем $z=0,\ dz=0$, поэтому

$$\vec{a}\,d\vec{r}=\left\{y\,e^{xy},x\,e^{xy},0\right\}\cdot\{dx,dy,0\}=e^{xy}\,(y\,dx+x\,dy)=e^{xy}\,d(xy),$$

$$I_3=\int\limits_{AB}e^{xy}\,d(xy)=e^{xy}\Bigg|_{A(1,0)}^{B(0,1)}=1-1=0.$$

Итак, $\Pi(\operatorname{rot}\vec{a})=I_1+I_2+I_3=0$.

4.5. Потенциальные, соленоидальные, гармонические поля

Потенциальное поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется ***потенциальным***, если оно является ***полем градиента*** некоторой скалярной функции U, т.е. $\vec{a}=\operatorname{grad}U$; при этом функцию U называют ***скалярным потенциалом*** векторного поля.

Свойства потенциального поля

1). Поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом $U \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot d\vec{r} = dU$.
2). В потенциальном поле линейный интеграл $\int\limits_{(L)} \vec{a}\cdot d\vec{r}$ не зависит от формы пути.
3). В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.
4). Односвязное поле $\vec{a}$ потенциально $\Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.
5). В потенциальном поле линейный интеграл по дуге равен разности потенциалов конца и начала дуги.
6). Центральное поле $\vec{a} = f(r)\cdot\vec{r}$ потенциально и его потенциал $U(r) = \int f(r)\cdot r\,dr$

Пример 4.22. Показать, что поле $\vec{a} = \dfrac{yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$ потенциально. Найти работу поля при перемещении по линии (L): $\begin{cases} x^2 = 6z, \\ y = 6, \end{cases}$ от т. $B\left(1, 6, \dfrac{1}{6}\right)$ до т. $D(0, 6, 0)$.

Решение. Так как $\vec{a}\cdot d\vec{r} = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2} = \dfrac{d(xyz)}{1 + (xyz)^2} = d(\operatorname{arctg} xyz) = dU$,

то по свойству 1) поле $\vec{a}$ потенциально и $U = \operatorname{arctg} xyz$ – его потенциал. В потенциальном поле линейный интеграл (а значит, и работа A) по дуге кривой равен разности потенциалов конца и начала дуги, т.е.

$$A = \int\limits_{\cup BD} \vec{a}\cdot\overrightarrow{dr} = U(D) - U(B) = \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4.23. Найти потенциал поля $\vec{a}$, если: 1) $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, 2) $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$.

Решение. По свойству 6) центральное поле вектора $\vec{a} = f(r)\cdot\vec{r}$ потенциально и его потенциал равен $U(r) = \int f(r)\cdot r\,dr$, поэтому:

$$1)\ U(r) = \int \frac{r}{r}\,dr = r + C; \quad 2)\ U(r) = \int \frac{r}{r^2}\,dr = \int \frac{1}{r}\,dr = \ln r + C.$$

Пример 4.24. Является ли поле вектора $\vec{a} = \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{z}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{y}{z^2} - \dfrac{1}{x}\right)\vec{k}$ потенциальным? Если да, то найти его потенциал.

Решение. Вычислим ротор поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right) & \left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{z}\right) & \left(\dfrac{y}{z^2} - \dfrac{1}{x}\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\right)\vec{i} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$, то поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом U, причем $\operatorname{grad} U = \vec{a}$, или в координатной форме

$$U'_x=\left(\frac{z}{x^2}-\frac{1}{y}\right),\quad U'_y=\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{z}\right),\quad U'_z=\left(\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}\right). \tag{4.1}$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x: $U=\int\left(\frac{z}{x^2}-\frac{1}{y}\right)dx=-\frac{z}{x}-\frac{x}{y}+\varphi(y,z)$.

Подставим полученную функцию U во второе из равенств (4.1) и найдем $\varphi(y,z)$:

$$U'_y=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{z}=\frac{x}{y^2}-\varphi'_y(y,z)\ \Rightarrow\ \varphi'_y(y,z)=-\frac{1}{z}\ \Rightarrow\ \varphi(y,z)=\int\left(-\frac{1}{z}\right)dy=-\frac{y}{z}+C(z),$$

то есть $U=-\frac{z}{x}-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+C(z)$.

Подставим полученную функцию в третье из равенств (4.1) и найдем $C(z)$:

$$U'_z=\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}+\frac{y}{z^2}+C'_z(z)\ \Rightarrow\ C'_z(z)=0\ \Rightarrow\ C(z)=const=C.$$

Таким образом, имеем $U(x,y,z)=-\frac{z}{x}-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+C$. Для проверки следует найти вектор $\operatorname{grad}U=\{U'_x,U'_y,U'_z\}$ и проверить его совпадение с заданным вектором $\vec{a}$.

Соленоидальное поле

Поле $\vec{a}$ называют ***соленоидальным***, если оно является ***полем ротора*** некоторой векторной функции $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b}$; при этом вектор $\vec{b}$ называют ***векторным потенциалом*** поля $\vec{a}$.

Поле $\vec{a}$ является соленоидальным тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}\vec{a}=0$.

Пример 4.25. Проверить соленоидальность поля

$$\vec{a}=y\,e^{x^2}\,\vec{i}+2yz\,\vec{j}-\left(2xyz\,e^{x^2}+z^2\right)\vec{k}$$

и найти его векторный потенциал.

Решение. Вычислим дивергенцию поля:

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\,e^{x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(2yz)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-2xyze^{x^2}-z^2\right)=2xye^{x^2}+2z-\left(2xye^{x^2}+2z\right)=0.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a}=0$,то поле вектора $\vec{a}$ соленоидально, т.е. $\vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b}$.

Векторный потенциал $\vec{b}$ соленоидального поля $\vec{a}$ определяется с точностью до градиента произвольной функции. Поэтому подбором вектора $\operatorname{grad}U$ можно добиться того, чтобы одна из координат векторного потенциала $\vec{b}$ равнялась нулю, т.е. можно искать векторный потенциал, например, в виде $\vec{b}=\{b_1,\,b_2,\,0\}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{b}=\vec{a}=y\,e^{x^2}\,\vec{i}+2yz\,\vec{j}-\left(2xyz\,e^{x^2}+z^2\right)\vec{k}$, то получим систему уравнений

$$-\frac{\partial b_2}{\partial z}=y\,e^{x^2},\quad \frac{\partial b_1}{\partial z}=2yz,\quad \frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=-\left(2xyz\,e^{x^2}+z^2\right). \tag{4.2}$$

Проинтегрируем первое и второе из равенств (4.2) по z:

$$b_2 = -\int y e^{x^2} dz = -y z e^{x^2} + \varphi(x, y), \quad b_1 = \int 2 y z dz = y z^2 + \psi(x, y);$$

здесь $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – произвольные функции, не зависящие от переменной интегрирования z. Подставляя найденные b_2, b_1 в третье из равенств (4.2),

$$\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = \left(-2 x y z e^{x^2} + \varphi'_x(x, y)\right) - \left(z^2 + \psi'_y(x, y)\right) = -\left(2 x y z e^{x^2} + z^2\right),$$

получим $\varphi'_x(x, y) - \psi'_y(x, y) = 0$. В частности, можно взять $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$. Тогда векторный потенциал $\vec{b} = \{b_1, b_2, 0\} = \left\{y z^2, -y z e^{x^2}, 0\right\}$.

Гармоническое скалярное поле

Скалярное поле f называют ***гармоническим***, если функция f удовлетворяет ***уравнению Лапласа*** $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 0$.

Правую часть уравнения Лапласа называют ***оператором Лапласа*** и обозначают Δf. Оператор Лапласа будет использован в дальнейшем при решении задач математической физики (задач колебания, теплопроводности, диффузии).

В прямоугольной системе координат уравнение Лапласа принимает вид

$$\boxed{\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0}.$$

Пример 4.26. Будет ли скалярное поле $u = a x^2 + b y^2 + c x y + d x z + l y z$ гармоническим?

Решение. Вычислим производные $u''_{xx} = 2a$, $u''_{yy} = 2b$, $u''_{zz} = 0$ и оператор Лапласа $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 2a + 2b$. Если $b = -a$, то $\Delta u = 0$ и заданное поле является гармоническим. В остальных случаях это поле не является гармоническим.

Гармоническое векторное поле

Векторное поле $\vec{a}$, являющееся одновременно и потенциальным, и соленоидальным, называют ***гармоническим*** векторным полем.

Пример 4.27. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = (y z - 2x)\vec{i} + (x z + 2 y)\vec{j} + x y \vec{k}$ является гармоническим. Найти его скалярный и векторный потенциалы.

Решение. 1). Вычислим выражение

$$\vec{a}\, d\vec{r} = \{(y z - 2x), (x z + 2 y), x y\} \cdot \{dx, dy, dz\} = (y z - 2x) dx + (x z + 2 y) dy + x y dz =$$
$$= \underbrace{y z dx + x z dy + x y dz}_{= d(x y z)} \underbrace{-2x dx + 2 y dy}_{= d\left(y^2 - x^2\right)}.$$

Так как выражение $\vec{a}\, d\vec{r}$ является полным дифференциалом $d\left(x y z + y^2 - x^2\right)$, то поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом $U = x y z + y^2 - x^2$.

2). Вычислим дивергенцию поля:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(y z - 2x) + \frac{\partial}{\partial y}(x z + 2 y) + \frac{\partial}{\partial z}(x y) = -2 + 2 + 0 = 0.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a}=0$,то поле вектора $\vec{a}$ соленоидально, т.е. $\vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b}$.

Векторный потенциал $\vec{b}$ соленоидального поля $\vec{a}$ определяется с точностью до градиента произвольной функции. Поэтому, как и в примере 4.25, можно искать векторный потенциал, например, в виде $\vec{b}=\{b_1,\,b_2,\,0\}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{b}=\vec{a}=(yz-2x)\vec{i}+(xz+2y)\vec{j}+xy\vec{k}$, то получим систему уравнений

$$-\frac{\partial b_2}{\partial z}=(yz-2x),\quad \frac{\partial b_1}{\partial z}=(xz+2y),\quad \frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=xy\ . \tag{4.3}$$

Проинтегрируем первое и второе из равенств (4.3) по z:

$$b_2=-\int(yz-2x)\,dz=-\frac{yz^2}{2}+2xz+\varphi(x,y),\quad b_1=\int(xz+2y)\,dz=\frac{xz^2}{2}+2yz+\psi(x,y);$$

здесь $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – произвольные функции, не зависящие от переменной интегрирования z. Подставляя найденные b_2, b_1 в третье из равенств (4.3), получим:

$$\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=\left(2z+\varphi'_x(x,y)\right)-\left(2z+\psi'_y(x,y)\right)=xy\quad\Rightarrow\quad \varphi'_x(x,y)-\psi'_y(x,y)=xy.$$

В частности, можно взять $\varphi(x,y)=\frac{x^2y}{2}$, $\psi(x,y)=0$. Тогда векторный потенциал

$$\vec{b}=\{b_1,\,b_2,\,0\}=\left\{\frac{xz^2}{2}+2yz,\ -\frac{yz^2}{2}+2xz+\frac{yx^2}{2},\ 0\right\}.$$

4.6. Действия с оператором Гамильтона «набла»

Рассмотрим символический оператор Гамильтона (или вектор “набла”)

$$\boxed{\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}}.$$

С его помощью удобно записать основные операции теории поля:

1) градиент скалярного поля есть произведение вектора $\vec{\nabla}$ на скалярную функцию f

$$\boxed{\operatorname{grad} f=\left\{\frac{\partial}{\partial x}f,\frac{\partial}{\partial y}f,\frac{\partial}{\partial z}f\right\}=\vec{\nabla}f};$$

2) дивергенция векторного поля есть скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор поля

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q+\frac{\partial}{\partial z}R=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\{P,Q,R\}=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}};$$

3) ротор векторного поля $\vec{a}$ есть векторное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{\nabla}\times\vec{a}};$$

4) оператор Лапласа Δ скалярного поля f

$$\boxed{\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f} \quad \text{или символически} \quad \boxed{\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2};$$

5) производная по направлению

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l}_0 \cdot \operatorname{grad} f = \vec{l}_0 \cdot \vec{\nabla} f = \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{\nabla}\right) f} \quad \text{или символически} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial l} = \left(\vec{l}_0 \cdot \vec{\nabla}\right)};$$

6)
$$\boxed{\begin{array}{lll} \operatorname{grad} r = \vec{\nabla} r = \dfrac{\vec{r}}{r}, & \operatorname{div}\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3 \text{ в } \mathrm{R}_3, & \operatorname{rot}\vec{r} = \vec{\nabla}\times\vec{r} = 0, \\ \operatorname{grad}(\vec{a},\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{a},\vec{r}) = \vec{a}, & \operatorname{div}\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 2 \text{ в } \mathrm{R}_2, & \operatorname{rot}\left(f(r)\vec{r}\right) = 0. \\ \left(\vec{a} - \textit{постоянный вектор}\right) & & \end{array}} \qquad (4.4)$$

Такая запись основных операций поля наиболее часто используется в физических и технических приложениях.

При применении оператора $\vec{\nabla}$ следует учитывать и его векторную и его дифференциальную природу. На этом основаны правила применения $\vec{\nabla}$. Эти правила можно было заметить при изучении дифференциальных свойств дивергенции, градиента, ротора.

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, не содержащим произведения переменных

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, не содержащим произведения переменных, происходит по правилам векторной алгебры. При этом величину, на которую действует оператор $\vec{\nabla}$, отмечают штрихом (когда это требуется) и располагают справа от $\vec{\nabla}$, соблюдая правила векторной алгебры.

Следует иметь в виду, что $\vec{\nabla}$ не является обычным вектором; например,

а) $\vec{\nabla}$ не имеет ни длины, ни направления,

б) $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ не перпендикулярен $\vec{a}$,

в) векторы $\vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}v$ – не коллинеарны, так как вектор $\vec{\nabla}u$ направлен по нормали к поверхности уровня $u = const$, вектор $\vec{\nabla}v$ направлен по нормали к поверхности уровня $v = const$;

г) если $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ действует на величину, помеченную штрихом, то следует его понимать как дифференциальный оператор $\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{\nabla} = a_1\dfrac{\partial}{\partial x} + a_2\dfrac{\partial}{\partial y} + a_3\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Эти примеры показывают, что с вектором $\vec{\nabla}$ следует обращаться с осторожностью и при отсутствии уверенности в полученном результате его следует проверить непосредственно, без использования $\vec{\nabla}$.

Пример 4.28. Вычислить $\operatorname{div}\left(r^2\vec{a}\right)$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор.

Решение. Запишем дивергенцию поля с помощью $\vec{\nabla}$: $\operatorname{div}\left(r^2\vec{a}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(r^2\vec{a}\right)$;

переменную величину r^2 перенесем к вектору $\vec{\nabla}$ и поставим за ним, перенося скаляр r^2 по свойству скалярного произведения от второго вектора к первому:

$$\operatorname{div}\left(r^2\vec{a}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(r^2\vec{a}\right) = \left(\vec{\nabla}r^2\right)\cdot\vec{a}.$$

Воспользуемся свойствами градиента:

$$\operatorname{div}\left(r^2\,\vec{a}\right)=\left(\vec{\nabla}r^2\right)\cdot\vec{a}=\left(r^2\right)'\left(\vec{\nabla}r\right)\cdot\vec{a}=2\,r\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{a}=2\,\vec{r}\cdot\vec{a}\,.$$

Пример 4.29. Вычислить $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор.

Решение. Запишем ротор поля с помощью $\vec{\nabla}$: $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})=\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r})$.

Воспользуемся свойством двойного векторного произведения:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\quad\Rightarrow\quad\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})=\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\times\vec{r}^{\,/}\right)=\vec{a}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}^{\,/}\right)-\vec{r}^{\,/}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right).$$

По свойству 6) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$. Кроме того, оператор $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)$ запишем в виде $\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)$ и расположим перед вектором $\vec{r}$, на который он действует. Тогда

$$\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r})=3\,\vec{a}-\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}^{\,/}=3\,\vec{a}-\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\{x,y,z\}=3\,\vec{a}-\{a_1,\,a_2,\,a_3\}=3\,\vec{a}-\vec{a}=2\,\vec{a}.$$

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, содержащим произведение переменных

В этом случае на первый план выходят дифференциальные свойства оператора $\vec{\nabla}$ и правило дифференцирования произведения.

> Результатом действия $\vec{\nabla}$ на произведение переменных является сумма произведений; в каждом из них $\vec{\nabla}$ действует на один множитель, который отмечают штрихом и располагают справа от $\vec{\nabla}$, соблюдая правила векторной алгебры.

Пример 4.30. Доказать, используя $\vec{\nabla}$, что $\operatorname{rot}(f\,\vec{a})=f\operatorname{rot}\vec{a}+(\operatorname{grad}f)\times\vec{a}$, где f – функция, $\vec{a}$ – переменный вектор.

Решение. Используем правила действия с оператором $\vec{\nabla}$:

$$\operatorname{rot}(f\,\vec{a})=\vec{\nabla}\times\left(f^{/}\,\vec{a}\right)+\vec{\nabla}\times\left(f\,\vec{a}^{\,/}\right).$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, справа от $\vec{\nabla}$, воспользуемся свойствами векторного произведения: скаляр можно переносить от второго вектора к первому и скаляр можно выносить за знак векторного произведения. Поэтому

$$\operatorname{rot}(f\,\vec{a})=\vec{\nabla}\times\left(f^{/}\,\vec{a}\right)+\vec{\nabla}\times\left(f\,\vec{a}^{\,/}\right)=\left(\vec{\nabla}f^{/}\right)\times\vec{a}+f\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}^{\,/}\right)=(\operatorname{grad}f)\times\vec{a}+f\operatorname{rot}\vec{a}\,.$$

Пример 4.31. Вычислить $\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)$, если $\vec{a}$ – постоянный вектор.

Решение. Запишем ротор поля с помощью $\vec{\nabla}$: $\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)$.

Используем правила действия с оператором $\vec{\nabla}$:

$$\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})^{/}\,\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}^{\,/}\right).$$

Как и в предыдущем примере, чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, справа от $\vec{\nabla}$, воспользуемся свойствами векторного произведения: скаляр можно переносить от второго вектора к первому и скаляр можно выносить за знак векторного произведения. Поэтому

$$\operatorname{rot}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})^{/}\,\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}^{\,/}\right)=\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})^{/}\right)\times\vec{r}+(\vec{a}\cdot\vec{r})\left(\vec{\nabla}\times\vec{r}^{\,/}\right)=\vec{a}\times\vec{r}\,.$$

Здесь мы воспользовались двумя из свойств (4.4): $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}$, $\quad\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$.

Пример 4.32. Показать, что поле $f(r)=\frac{1}{r}$ является гармоническим в пространстве R_3, а поле $f(r)=\ln r$ является гармоническим в пространстве R_2.

Решение. 1). По свойствам градиента $\operatorname{grad}\frac{1}{r}=\left(\frac{1}{r}\right)'\operatorname{grad} r=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{-1}{r^3}\vec{r}$.

Используем правила действия с оператором $\vec{\nabla}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\left(\frac{-1}{r^3}\right)'\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}'\right).$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, справа от $\vec{\nabla}$, воспользуемся двумя свойствами скалярного произведения: скаляр можно переносить от второго вектора к первому и скаляр можно выносить за знак скалярного произведения. Поэтому

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\left(\frac{-1}{r^3}\right)'\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}'\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{-1}{r^3}\right)'\cdot\vec{r}-\frac{1}{r^3}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}'\right)=\left(\frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{r}-\frac{3}{r^3}=0.$$

При этом мы учли, что $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$ в пространстве R_3 и $\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2$.

2). Аналогично проверьте, что поле $f(r)=\ln r$ является гармоническим в пространстве R_2, учитывая, что $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=2$ в пространстве R_2.

Пример 4.33. Пусть u, v – произвольные функции. Доказать, что поле $\vec{a}=\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)$, является соленоидальным.

Решение. Вычислим с помощью оператора $\vec{\nabla}$ дивергенцию этого поля:

$$\operatorname{div}\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)\right]=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)'\times\left(\vec{\nabla}v\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)'\right].$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, рядом с $\vec{\nabla}$, справа от него, воспользуемся следующими свойствами смешанного и векторного произведения:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\quad \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}\ .$$

Тогда $\operatorname{div}\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)'\times\left(\vec{\nabla}v\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)'\right]=\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}u\right)'\right]\cdot\left(\vec{\nabla}v\right)-\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}v\right)'\right]\cdot\left(\vec{\nabla}u\right)$.

Так как поле $\vec{\nabla}u=\operatorname{grad}u$ является потенциальным, то ротор этого поля равен нулю, т.е. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}u\right)'=\operatorname{rot}\left(\vec{\nabla}u\right)'=0$. Аналогично, $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}v\right)'=0$. Поэтому $\operatorname{div}\vec{a}=0$ и, значит, поле $\vec{a}=\left(\vec{\nabla}u\right)\times\left(\vec{\nabla}v\right)$ является потенциальным.

4.7. Теория поля в ортогональной криволинейной системе координат

Пусть известна связь между декартовыми и криволинейными координатами $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ или в векторном виде $\vec{r}=\vec{r}(u,v,w)$.

Если векторы $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$, $\vec{r}_w{}'$ — ортогональны, то базис $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$, $\vec{r}_w{}'$ называют ***ортогональным***. Наиболее удобен соответствующий ***ортонормированный*** базис (ОНБ)

$$\boxed{\vec{e}_u=\frac{\vec{r}_u{}'}{\left|\vec{r}_u{}'\right|}=\frac{\vec{r}_u{}'}{H_u},\quad \vec{e}_v=\frac{\vec{r}_v{}'}{\left|\vec{r}_v{}'\right|}=\frac{\vec{r}_v{}'}{H_v},\quad \vec{e}_w=\frac{\vec{r}_w{}'}{\left|\vec{r}_w{}'\right|}=\frac{\vec{r}_w{}'}{H_w}}.$$

Величины $H_u = \left|\vec{r}_u{}'\right|$, $H_v = \left|\vec{r}_v{}'\right|$, $H_w = \left|\vec{r}_w{}'\right|$ называют коэффициентами Ламэ.

Для цилиндрической системы координат коэффициенты Ламэ и ортонормированный базис имеют вид:

$$\boxed{H_\rho = 1,\ \ H_\varphi = \rho,\ \ H_z = 1},$$

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0\},\ \ \vec{e}_\varphi = \{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\},\ \ \vec{e}_z = \{0,\ 0,\ 1\}}$$

Для сферической системы координат коэффициенты Ламэ и ортонормированный базис имеют вид:

$$\boxed{H_r = 1,\ \ H_\theta = r,\ \ H_\varphi = r\sin\theta},$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\},\ \ \vec{e}_\theta = \{\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\},\ \ \vec{e}_\varphi = \{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\}.}$$

Градиент в ортогональных координатах

Пусть задано скалярное поле $f(u,v,w)$ в криволинейной ортогональной системе координат с ортонормированным базисом $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$. Тогда

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_w}.$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z};$$

в сферических координатах

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi}.$$

Пример 4.34. Скалярное поле $f = \dfrac{\theta - \sin\theta}{2r^2}$ задано в сферической системе координат. Найти в пространстве точки, в которых $\operatorname{grad} f = 0$.

Решение. Вычислим $\operatorname{grad} f$ в сферической системе:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi = -\frac{\theta - \sin\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{1-\cos\theta}{2r^2}\vec{e}_\theta = \frac{\sin\theta - \theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{1-\cos\theta}{2r^3}\vec{e}_\theta.$$

Поэтому $\operatorname{grad} f = 0$, если $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \theta \ \Rightarrow\ \theta = 0$.

Таким образом, $\operatorname{grad} f = 0$ в точках положительной полуоси OZ.

Векторные линии в ортогональных координатах

Векторная линия поля $\vec{a}$ есть линия, в каждой точке которой касательный вектор $d\vec{r}$ коллинеарен вектору поля $\vec{a}$.

Для отыскания векторных линий поля $\vec{a} = a_u\vec{e}_u + a_v\vec{e}_v + a_w\vec{e}_w$, заданного в произвольной ортогональной системе координат, следует составить и решить систему дифференциальных уравнений

$$\boxed{\frac{H_u\,du}{a_u} = \frac{H_v\,dv}{a_v} = \frac{H_w\,dw}{a_w}}.$$

Пример 4.35. Найти векторные линии поля $\vec{a}=\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r+\varphi\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$, заданного в сферической системе координат.

Решение. Воспользуемся дифференциальными уравнениями векторных линий:

$$\frac{H_r\,d\,r}{a_r}=\frac{H_\theta\,d\theta}{a_\theta}=\frac{H_\varphi\,d\varphi}{a_\varphi}\ .$$

Так как $H_r=1,\ H_\theta=r,\ H_\varphi=r\sin\theta;\quad a_r=\frac{1}{r^2},\ a_\theta=0,\ a_\varphi=\varphi\sin\theta$, то дифференциальные уравнения векторных линий примут вид

$$\frac{d\,r}{1/r^2}=\frac{r\,d\theta}{0}=\frac{r\sin\theta\,d\varphi}{\varphi\sin\theta}\quad\text{или}\quad d\theta=0,\ \ r\,dr=\frac{d\varphi}{\varphi}.$$

Проинтегрировав, получим уравнения векторных линий $\begin{cases}\theta=c_1,\\ r^2=2\ln\varphi+\ln c_2.\end{cases}$

Линейный интеграл в ортогональных координатах

Линейный интеграл поля $\vec{a}$ в ортогональной системе вычисляется по формуле

$$\boxed{\int\limits_{(L)}\vec{a}\ d\,\vec{r}=\int\limits_{(L)}a_uH_u\,du+a_vH_v\,dv+a_wH_w\,dw}.$$

Пример 4.36. Найти линейные интегралы поля $\vec{a}=r\sin\theta\,\vec{e}_r+r\,\theta\,\vec{e}_\theta$ вдоль координатных линий (l_θ), (l_φ) сферической системы координат.

Решение. Линейный интеграл поля вычислим по формуле, записав ее для сферической системы координат

$$\oint\limits_{(l)}\vec{a}\ d\,\vec{r}=\oint\limits_{(l)}a_rH_r\,dr+a_\theta H_\theta\,d\theta+a_\varphi H_\varphi\,d\varphi=\int\limits_{(l)}r\sin\theta\,dr+r^2\theta\,d\theta.$$

Координатная линия (l_θ) сферической системы координат есть полуокружность, на которой $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$, θ является параметром и меняется от 0 до π. Поэтому

$$\int\limits_{(l_\theta)}r\sin\theta\,dr+r^2\theta\,d\theta=\int\limits_0^\pi r_0^2\,\theta\,d\theta=r_0^2\,\frac{\theta^2}{2}\Bigg|_0^\pi=r_0^2\,\frac{\pi^2}{2}.$$

Координатная линия (l_φ) сферической системы координат есть окружность, на которой $r=r_0$, $\theta=\theta_0$, φ является параметром. Так как $dr=0,\ d\theta=0$, то

$$\int\limits_{(l_\varphi)}r\sin\theta\,dr+r^2\theta\,d\theta=0.$$

Поток в ортогональных координатах

Поток поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность (σ) вычисляется по формуле $\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$, где $\vec{n}$ – единичный нормальный вектор поверхности (σ).

Рассмотрим случай, когда (σ) есть часть координатной поверхности $w = w_0$. Тогда

$$\boxed{\Pi_\sigma = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_w H_u H_v\right)_{w=w_0} du\, dv};$$

здесь берется знак $(+)$, если $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{e}_w$, знак $(-)$, если $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{e}_w$.

Аналогично, если (σ) есть часть координатной поверхности $u = u_0$, то

$$\boxed{\Pi_\sigma = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_u H_v H_w\right)_{u=u_0} dv\, dw};$$

здесь берется знак $(+)$, если $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{e}_u$, знак $(-)$, если $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{e}_u$.

Пример 4.37. Вычислить поток поля $\vec{a} = \rho \vec{e}_\rho + \rho\varphi \vec{e}_\varphi - 2z\vec{e}_z$, заданного в цилиндрической системе координат, через замкнутую поверхность, образованную цилиндром $\rho = 1$, полуплоскостями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и плоскостями $z = -1$, $z = 1$ (рис. 63).

Решение. Замкнутая поверхность (σ) состоит из поверхности цилиндра (σ_1) с уравнением $\rho = 1$, из нижнего основания (σ_2) с уравнением $z = -1$, верхнего основания (σ_3) с уравнением $z = 1$, боковой грани (σ_4) с уравнением $\varphi = 0$ и боковой грани (σ_5) с уравнением $\varphi = \pi/2$. Все эти поверхности являются координатными поверхностями цилиндрической системы координат, поэтому получим:

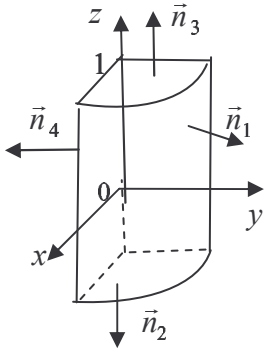

Рис. 63

1) $$\Pi_{\sigma_1} = \pm \iint\limits_{(S_1)} \left(\underbrace{a_\rho}_{=\rho} \underbrace{H_z}_{=1} \underbrace{H_\varphi}_{=\rho}\right)_{\rho=1} dz\, d\varphi = +\iint\limits_{(S_1)} \rho^2\Big|_{\rho=1} dz\, d\varphi = \int\limits_{-1}^{1} dz \int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi = \pi,$$

перед интегралом выбираем знак $(+)$, т.к. вектор $\vec{e}_\rho = \{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0\}$ имеет при $\varphi \in (0,\ \pi/2)$ положительные первую и вторую координаты, как и вектор $\vec{n}_1$;

2) $$\Pi_{\sigma_2} = \pm \iint\limits_{(S_2)} \left(\underbrace{a_z}_{=-2z} \underbrace{H_\rho}_{=1} \underbrace{H_\varphi}_{=\rho}\right)_{z=-1} d\rho\, d\varphi = -\iint\limits_{(S_2)} 2\rho\, d\rho\, d\varphi = -\int\limits_{0}^{1} 2\rho\, d\rho \int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi = -\pi/2,$$

перед интегралом выбираем знак $(-)$, т.к. вектор $\vec{e}_z = \{0,\ 0,\ 1\} \uparrow\downarrow \vec{n}_2$;

3) $$\Pi_{\sigma_3} = \pm \iint\limits_{(S_3)} \left(\underbrace{a_z}_{=-2z} \underbrace{H_\rho}_{=1} \underbrace{H_\varphi}_{=\rho}\right)_{z=1} d\rho\, d\varphi = +\iint\limits_{(S_3)} -2\rho\, d\rho\, d\varphi = -\int\limits_{0}^{1} 2\rho\, d\rho \int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi = -\pi/2,$$

перед интегралом выбираем знак $(+)$, т.к. вектор $\vec{e}_z = \{0,\ 0,\ 1\} \uparrow\uparrow \vec{n}_3$;

4) $$\Pi_{\sigma_4} = \pm \iint\limits_{(S_4)} \left(\underbrace{a_\varphi}_{=\rho\varphi} \underbrace{H_\rho}_{=1} \underbrace{H_z}_{=1}\right)_{\varphi=0} d\rho\, dz = 0;$$

5) $$\Pi_{\sigma_5} = \pm \iint\limits_{(S_5)} \left(\underbrace{a_\varphi}_{=\rho\varphi} \underbrace{H_\rho}_{=1} \underbrace{H_z}_{=1}\right)_{\varphi=\pi/2} d\rho\, dz = +\frac{\pi}{2} \iint\limits_{(S_5)} \rho\, d\rho\, dz = \frac{\pi}{2} \int\limits_{0}^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{-1}^{1} dz = \pi/2,$$

перед интегралом выбираем знак $(+)$, т.к. $\vec{e}_\varphi = \{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\}_{\varphi=\pi/2} = \{-1,0,0\}$, т.е. $\vec{e}_\varphi \uparrow\uparrow \vec{n}_5$.

Окончательно, $\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma_1} + \Pi_{\sigma_2} + \Pi_{\sigma_3} + \Pi_{\sigma_4} + \Pi_{\sigma_5} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Дивергенция в ортогональных координатах

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v H_u H_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w H_u H_v)\right]}.$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z)\right]},$$

в сферических координатах

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi)}.$$

Пример 4.38. Решить пример 4.36, используя формулу Остроградского.

Решение. Так как поверхность (σ) – замкнутая, то поток через такую поверхность можно вычислить по формуле Остроградского:

$$\Pi_{(\sigma)} = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV,$$

где (V) – тело, ограниченное поверхностью (σ). Вычислим дивергенцию поля $\vec{a} = \rho\vec{e}_\rho + \rho\varphi\vec{e}_\varphi - 2z\vec{e}_z$, учитывая, что $a_\rho = \rho,\quad a_\varphi = \rho\varphi,\quad a_z = -2z$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z)\right] = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(-2\rho z)\right] = 2 + 1 - 2 = 1.$$

Тогда $\Pi_{(\sigma)} = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = \int\limits_{(V)} dV = \frac{1}{4}V_{цил.} = \frac{1}{4}\pi R^2 H\Big|_{R=1,\ H=2} = \frac{\pi}{2}$.

Библиографический список

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
2. Краснов М.Л. Векторный анализ: задачи и упражнения /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 160 с.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / Г.С. Бараненков [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. М.: ООО "Издательство Астрель", 2002. 495 с.
5. Минькова Р.М. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных: учебное пособие для студентов физических специальностей /Р.М. Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2007. 119 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике/ Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.2. 256 с.

Учебное издание

Минькова Ревекка Максовна,
Чуксина Наталия Владимировна

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

Руководство к решению задач

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой, Н.В.Чуксиной*

ИД №06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать .2008 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л.
Уч.-изд. л. 4,5 Тираж 200 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19